

# CORSO DI LAUREA IN FISICA

## DIARIO DELLE LEZIONI DI

### ANALISI MATEMATICA II

#### Anno Accademico 2011-2012

##### 1) Mercoledì 12 Ottobre 2011

Richiami sui concetti di continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità per funzioni vettoriali di più variabili. Teorema del Differenziale Totale (con dimostrazione) e controesempio all'implicazione inversa. Esercizi.

##### 2) Venerdì 14 Ottobre 2011

Derivabilità della funzione composta (con dimostrazione) e controesempio all'assenza dell'ipotesi di differenziabilità. Differenziabilità della funzione composta (solo enunciato). Definizione di cammino, rappresentazione parametrica, cambiamento ammissibile di parametrizzazione, punti estremi o terminali, cammino chiuso o aperto. Retta tangente ad un cammino rispetto ad una parametrizzazione. Esempio di dipendenza dell'esistenza della retta tangente dalla parametrizzazione. Significato geometrico della differenziabilità.

##### 3) Mercoledì 19 Ottobre 2011

Coseno dell'angolo di due vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Significato geometrico della derivata direzionale. Derivate e differenziali di ordine superiore. Teorema di Schwarz (sull'invertibilità dell'ordine di derivazione. Senza dimostrazione). <<Teorema: Se una funzione è differenziabile due volte in un punto, è ivi possibile invertire l'ordine di derivazione per le derivate seconde miste>> (senza dimostrazione). Esempio di funzione con derivate seconde miste differenti fra loro nello stesso punto. Forme quadratiche in  $\mathbb{R}^n$ . Simmetrizzabilità di una forma quadratica. Matrice associata ad una forma quadratica. Esistenza della Forma Canonica di una Forma Quadratica Simmetrica (con dimostrazione).

##### 4) Mercoledì 26 Ottobre 2011

Conseguenza del Teorema sull'Esistenza della Forma Canonica di una Forma Quadratica Simmetrica (disuguaglianza che coinvolge l'autovalore minimo e l'autovalore massimo - con dimostrazione). Definizione di forma quadratica definita, semidefinita, indefinita. Determinazione del segno di una forma quadratica attraverso il segno degli autovalori (con dimostrazione). Teorema di Cartesio sulla determinazione del segno delle radici reali di un'equazione algebrica attraverso lo studio del segno dei coefficienti dell'equazione (con dimostrazione). Formula di Taylor con resto di Peano per funzioni a codominio  $\mathbb{R}$  (senza dimostrazione). Definizione di punti di estremo relativo. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Forma Quadratica Hessiana. Condizione sufficiente per l'esistenza di punti di estremo relativo (con dimostrazione).

##### 5) Venerdì 28 Ottobre 2011

Condizione necessaria per l'esistenza di punti di estremo relativo (con dimostrazione). Esempi  $f(x,y) = x^4 + y^4$ ,  $f(x,y) = x^3 + y^3$ . Formula di Taylor con resto di Lagrange per funzioni a codominio  $\mathbb{R}$  (senza dimostrazione). Estendibilità della Formula di Taylor-Peano e non estendibilità della Formula di Taylor-Lagrange alle funzioni vettoriali (controesempio). Teorema di Lagrange (senza dimostrazione). Teorema del Gradiente Nullo (con definizione di poligonale o spezzata - con dimostrazione). Definizione di Funzione Implicita. Teorema di Dini nel caso di funzione scalare (con dimostrazione).

#### 6) Venerdì 4 Novembre 2011

Teorema di Derivabilità della Funzione Implicita nel caso scalare. Esempio di studio di funzione implicita. Osservazione sulla continuità delle derivate della funzione implicita. Spazi metrici. Esempi:  $\mathbb{R}^n$  con metrica euclidea,  $C^0([a,b])$  con metrica del max (o Lagrangiana). Intorni sferici e definizione di successione convergente. Convergenza uniforme (o nella metrica del max.)

#### 7) Mercoledì 9 Novembre 2011

Convergenza in  $\mathbb{R}^n$  (o  $C^n$ ) dotato della metrica euclidea. Spazi metrici completi.  $\mathbb{R}^n$  è completo (dimostrazione). Spazi di matrici completi.  $]-1,1[$  non è completo con la metrica euclidea, ma è completo con la metrica  $d(x,y) = |\operatorname{tg}((\pi/2)x) - \operatorname{tg}((\pi/2)y)|$  (dimostrazione). La convergenza e la divergenza di successioni in  $\mathbb{R}$  equivalgono alla convergenza in  $\mathbb{R}^*$  con un'opportuna metrica (dimostrazione). Spazi vettoriali metrici.  $l^2$  è spazio metrico con la distanza "estensione" di quella euclidea di  $\mathbb{R}^n$  (dimostrazione). Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in  $l^2$  (dimostrazione).  $l^2$  e  $C^0$  hanno dimensione infinita (dimostrazione). Base canonica in  $l^2$  (dimostrazione). La somma in  $l^2$  è continua (dimostrazione).

#### 8) Venerdì 11 Novembre 2011

Esercizi. Il prodotto per scalari in  $l^2$  è continuo (dimostrazione). Esempio di spazio vettoriale che è metrico, ma non è spazio vettoriale metrico (perché il prodotto per scalari non è continuo). Contrazioni e Teorema di Banach-Caccioppoli (dimostrazione). Maggiorazione dell'errore. Completezza di  $C^0([a,b])$  (dimostrazione).

#### 9) Mercoledì 16 Novembre 2011

Esercizi su calcolo di estremi relativi ed assoluti. Completezza di  $l^2$ . Esempi che dimostrano come le ipotesi del Teorema di Banach-Caccioppoli non possano essere eliminate del tutto. Spazi normati. Metrica indotta da una norma. Caratterizzazione delle metriche indotte da norme (omogeneità della metrica e invarianza per traslazione). Esempio di spazio vettoriale metrico la cui metrica non è indotta da alcuna norma.

#### 10) Venerdì 18 Novembre 2011

Esercizi su spazi metrici e su studio di funzioni. Nozioni topologiche (si veda il libro di testo). Insiemi limitati. Insiemi compatti e relativamente compatti. Non validità dei Teoremi di Borel-Heine e di Bolzano-Weierstrass in spazi metrici (esempi). Teorema di Bolzano-Weierstrass in  $\mathbb{R}^n$  (con dimostrazione). Insiemi sequenzialmente compatti e relativamente sequenzialmente compatti. Ogni insieme compatto o sequenzialmente compatto è chiuso e limitato (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass generalizzato e Teorema di Weierstrass (con dimostrazioni).

#### 11) Mercoledì 23 Novembre 2011

Metrica indotta. Intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi nella metrica indotta (con dimostrazione). Completezza nella metrica indotta. Totale limitatezza. Equivalenza di compattezza, sequenziale compattezza, completezza nella metrica indotta+totale limitatezza (con dimostrazione). Esercizi.

#### 12) Venerdì 25 Novembre 2011

Esercizi. Metrica integrale in  $C^0$  e non completezza. Proprietà dell'Intersezione Finita e caratterizzazione della compattezza (con dimostrazione). Ogni chiuso nella metrica indotta in un compatto è compatto (con dimostrazione). Caratterizzazione di Cantor della compattezza (con dimostrazione). Caratterizzazione di Cantor della completezza (con dimostrazione).

#### 13) Mercoledì 30 Novembre 2011

Caratterizzazione della completezza di spazi normati attraverso l'uso di serie assolutamente convergenti. Applicazioni lineari (=operatori) fra spazi normati. Continuità, limitatezza di operatori e condizioni equivalenti (con dimostrazione). Norma di operatori.  $L(X,Y)$ . Applicazione del Teorema di Banach-Caccioppoli allo studio dell'Equazione (lineare) Integrale di Volterra (nel caso di un'equazione a variabili separabili, sotto una condizione opportuna sulla funzione coefficiente).

14) Venerdì 02 Dicembre 2011

Rinormamento dello spazio  $C^0$  con norma equivalente alla norma Lagrangiana e dimostrazione dell'Esistenza di soluzione unica per il Problema di Cauchy relativo ad una equazione a variabili separabili. Definizione di norme equivalenti. Definizione di spazi normati isomorfi. Norma di matrici ed equivalenza con la norma degli operatori determinati dalle matrici  $n \times m$  (con dimostrazione). Isomorfismo di uno spazio normato di dimensione finita  $n$  e di  $\mathbb{R}^n$  (con dimostrazione). Corollario. Distanza di insiemi ed insiemi con distanza nulla (con dimostrazione). Lemma di Riesz e caratterizzazione degli spazi normati di dimensione finita come quelli in cui vale il Teorema di Borel-Heine o di Bolzano-Weierstrass (con dimostrazioni).

15) Mercoledì 07 Dicembre 2011

Lemma su separabilità di spazi metrici compatti e Teorema di Ascoli-Arzelà (entrambi dimostrati). Enunciato del Teorema di Hahn-Banach e dimostrazione di un suo corollario.  $L(X, Y)$  è spazio di Banach se e solo se  $Y$  lo è (con dimostrazione). Definizione di spazio duale e di funzionali. Teorema sull'invertibilità di opportuni operatori (con dimostrazione).

16) Mercoledì 11 Gennaio 2012

Esercizi. Funzioni vettoriali integrabili secondo Riemann e qualche importante proprietà dell'integrale (con dimostrazione). Estensione del Teorema di Lagrange alle funzioni vettoriali.

17) Venerdì 13 Gennaio 2012

Teorema di Dini (caso vettoriale. Con dimostrazione). Teorema di Derivazione della Funzione Implicita nel caso vettoriale (è stata provata solo la formula di calcolo della derivata). Definizione di punti di estremo vincolato. Osservazioni di natura geometrica introduttive al Teorema del Moltiplicatore di Lagrange.

18) Mercoledì 18 Gennaio 2012

Teorema del Moltiplicatore di Lagrange (con dimostrazione). Esempi. Condizione sufficiente perché un punto critico vincolato sia di estremo vincolato (senza dimostrazione).

19) Venerdì 20 Gennaio 2012

Esempi su vari argomenti trattati finora nel corso.

20) Mercoledì 14 Marzo 2012

Successioni di funzioni. Convergenza puntuale (o semplice). Criterio di Cauchy. Esempi di successioni di funzioni convergenti (fra cui la successione geometrica). Convergenza uniforme. La convergenza nella metrica Lagrangiana per funzioni continue è un caso particolare della convergenza uniforme. Conseguenze della convergenza uniforme (limitatezza della funzione limite, con dimostrazione; scambio di limiti, senza dimostrazione; corollario sulla continuità della funzione limite, con dimostrazione; scambio di limite e integrale, senza dimostrazione dell'integrabilità della funzione limite, ma con la dimostrazione della formula di passaggio al limite sotto il segno di integrale). Controesempi ai risultati precedenti. Convergenza uniforme e passaggio al limite sotto il segno di integrale improprio di 2<sup>a</sup> specie (senza dimostrazione).

21) Venerdì 16 Marzo 2012

Convergenza uniforme e passaggio al limite sotto il segno di integrale improprio di 1<sup>a</sup> specie: controesempi. Teorema della convergenza dominata e integrale improprio di 1<sup>a</sup> specie (con dimostrazione). Teorema della convergenza dominata e integrale improprio di 2<sup>a</sup> specie (senza dimostrazione). La convergenza uniforme di una successione di funzioni derivabili non garantisce la derivabilità della funzione limite. Osservazioni sulla natura di possibili ipotesi che garantiscano la possibilità che la funzione limite di funzioni derivabili sia anch'essa derivabile. Teorema dello scambio di limite e derivata (senza dimostrazione). Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme (Teorema di Dini, con dimostrazione, Teorema di Polya, senza dimostrazione, e Corollario sulle successioni di funzioni convesse, senza dimostrazione).

22) Mercoledì 21 Marzo 2012

Serie di funzioni. Convergenza semplice ed uniforme. Criterio di Cauchy per la convergenza semplice e per la convergenza uniforme (senza dimostrazioni). Condizione Necessaria per la convergenza semplice e per la convergenza uniforme (senza dimostrazioni). Teoremi relativi alle serie di funzioni che derivano dai Teoremi relativi alle successioni di funzioni (senza dimostrazioni). Esempi di applicazione dei precedenti risultati. Maggiorazione dell'errore e sua applicazione allo studio della convergenza uniforme.

23) Venerdì 23 Marzo 2012

Esercizi. Condizione sufficiente per la convergenza uniforme di una serie di funzioni (con dimostrazione). Convergenza totale. Convergenza assoluta. Confronto fra i quattro tipi di convergenza (con controesempi alle implicazioni inverse). Serie di potenze. Lemma sulla convergenza assoluta di una serie di potenze (con dimostrazione). Raggio di convergenza e intervallo di convergenza. Teorema dell'intervallo di convergenza (con dimostrazione).

24) Mercoledì 28 Marzo 2012

Estensione al caso complesso del Teorema dell'intervallo di convergenza. Convergenza agli estremi dell'intervallo di convergenza e convergenza uniforme e/o totale di una serie di potenze. Teorema di Abel (senza dimostrazione). Estensione al caso complesso dei precedenti risultati. Calcolo del raggio di convergenza attraverso il Criterio della Radice (con dimostrazione) ed attraverso il Criterio del Rapporto (senza dimostrazione). Serie delle derivate e confronto fra i raggi di convergenza di una serie di potenze e della serie delle derivate (con dimostrazione). Comportamento agli estremi per una serie di potenze e per la serie delle derivate (con dimostrazione). Calcolo dei coefficienti di una serie di potenze, nota la funzione somma (con dimostrazione). Serie di Taylor e/o di Mac Laurin. Esempio di funzione di classe  $C^\infty$ , non sviluppabile (senza dimostrazione).

25) Venerdì 30 Marzo 2012

Condizioni sufficienti per la sviluppabilità in serie di Taylor (con dimostrazione). Sviluppi notevoli ( $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $\arctg x$ ).

26) Mercoledì 04 Aprile 2012

Serie binomiale, suo intervallo di convergenza e calcolo della sua funzione somma (con dimostrazione). Alcune applicazioni della teoria sulle serie di Taylor svolta. Serie trigonometriche. Serie di Fourier. Calcolo dei coefficienti di una serie di Fourier (con dimostrazione). Condizioni sufficienti per la convergenza di una serie di Fourier (condizione (D) di Dirichlet – hölderianità) (senza dimostrazione).

27) Mercoledì 11 Aprile 2012

Funzioni a variazione totale limitata e loro proprietà (senza dimostrazione). Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Fourier per funzioni a VTL (senza dimostrazione). Serie di Fourier di funzioni periodiche di periodo  $2T$ ,  $T < 0$  e risultati relativi alla sua convergenza (senza dimostrazione).

28) Venerdì 13 Aprile 2012

Serie di soli coseni e di soli seni. Connessione. Caratterizzazione della connessione (con dimostrazione). Teorema sull'unione di insiemi connessi (con dimostrazione). Componenti connesse. Connessi in  $\mathbb{R}$  (con dimostrazione). Caratterizzazione della continuità attraverso l'immagine inversa di insiemi aperti e/o chiusi (con dimostrazione). Teorema di Esistenza degli Zeri e di Darboux (con dimostrazione).

29) Mercoledì 18 Aprile 2012

Lezione non tenuta per assenza di energia elettrica.

### 30) Venerdì 20 Aprile 2012

Segmenti e spezzate (o poligonali) in spazi vettoriali. Spezzate semplici. Insiemi convessi, connessi per spezzate, internamente connessi. Relazioni fra tali nozioni e la nozione di connessione (con dimostrazioni e controesempi). Equivalenza della connessione e della connessione per spezzate (semplici) per insiemi aperti in spazi vettoriali metrici in cui ogni intorno è convesso (con dimostrazione). In spazi vettoriali metrici ogni insieme non vuoto e non coincidente con l'intero spazio ha frontiera non vuota (con dimostrazione). Cammini regolari, regolari a tratti, di classe  $C^1$ , di classe  $C^1$  a tratti. Cammini orientati.

### 31) Mercoledì 02 Maggio 2012

Orientazione positiva di un cammino (convenzione). Orientazione positiva della retta tangente (quando esiste) determinata dall'orientazione positiva di un cammino. Punti angolosi. Punti cuspidali. Cammini rettificabili. Lunghezza. Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione scelta (senza dimostrazione). Calcolo della lunghezza per cammini di classe  $C^1$  a tratti (con dimostrazione). Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione scelta nel caso di cammini di classe  $C^1$  a tratti (con dimostrazione). Ascissa curvilinea. Parametrizzazione intrinseca. Integrale curvilineo di prima specie di una funzione continua esteso ad un cammino regolare a tratti e sue proprietà (linearità rispetto alla funzione integranda, integrale sul cammino unione, indipendenza dalla parametrizzazione del cammino e dalla sua orientazione). Massa di un filo di densità lineare nota. Coordinate del baricentro di un filo di densità lineare nota. Forme differenziali lineari (o 1-forme differenziali).

### 32) Venerdì 04 Maggio 2012

Integrale curvilineo di seconda specie di una funzione continua esteso ad un cammino regolare a tratti e sue proprietà (linearità rispetto alla funzione integranda, integrale sul cammino unione, indipendenza dalla parametrizzazione del cammino orientato, dipendenza dalla orientazione del cammino). Calcolo del lavoro di un campo di forze. Primitiva o potenziale e forme differenziali esatte. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (con dimostrazione). Condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di una forma differenziale lineare (con cenno della dimostrazione). Esempi di calcolo di potenziali.