Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (P–Z)

Esame di Analisi Matematica II

12 Dicembre 2002

1. Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x,y) = \arctan\left[(|x| + 2y)y^2\right].$$

2. Calcolare

$$\int_\varphi \frac{dx}{x\sqrt{xy}} + \frac{dy}{y\sqrt{xy}}$$

dove $\varphi = (1 - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

3. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3 + 2n + 3} \cos(nx)\, 2^{-nx^2}.$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C1

1) Data la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x}\right) \qquad\qquad x \in [0, +\infty[$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale X; quindi dire se la successione converge uniformemente in X, giustificando la riposta; in caso di risposta negativa, determinare sottoinsiemi di X nei quali la successione converge uniformemente.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^2}{x^4+y^2} + y & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = 2(x+y)|y-x| - e^{(x+y)|y-x|}$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C2

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 - 1 \right] \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^n \qquad x \neq 1$$

studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} + x & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y)|y| - \operatorname{arctg}\{2(x^2 + y)|y|\}$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C3

1) Data la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n+1}}} \qquad\qquad x \in [0, +\infty[$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale X; quindi dire se la successione converge uniformemente in X, giustificando la riposta; in caso di risposta negativa, determinare sottoinsiemi di X nei quali la successione converge uniformemente.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} + y & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = 2(x^2 + y)|y + x| - \arcsin\{(x^2 + y)|y + x|\}$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C4

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{\frac{1}{n^2}}-1\right]\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^n \qquad\qquad x\neq -1$$

studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale.

2) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^2y}{x^2+y^2}+x+y & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y)=|y-x^2|\,x\,\text{arctg}\,\{|y-x^2|\,x\}$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C5

1) Data la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = \frac{x + \frac{1}{n+1}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}} \qquad\qquad x \in [0, +\infty[$$

determinare l'insieme di convergenza puntuale X; quindi dire se la successione converge uniformemente in X, giustificando la riposta; in caso di risposta negativa, determinare sottoinsiemi di X nei quali la successione converge uniformemente.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{|x|y}{|x|+|y|} + y & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = \left[(y-1)|y-x^2| - 1\right] \arcsin\left[(y-1)|y-x^2| - 1\right]$$

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del 22-02-2003 di

Analisi Matematica II (Q-Z).C6

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\frac{1}{n}\right]\left(\frac{x}{x-3}\right)^{n} \qquad\qquad x\neq 3$$

studiarne la convergenza puntuale, uniforme e totale.

2) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+x & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità parziale e direzionale, la differenziabilità nell'origine.

3) Determinare gli estremi relativi della funzione

$$f(x,y)=|y|\,(x^2+y^2-4)-3\,\sqrt[3]{|y|\,(x^2+y^2-4)}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (Q-Z) del 26-03-2003

Il candidato risolva almeno un esercizio per ognuno dei due gruppi seguenti

Gruppo 1

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}{n} x^n$$

2) Determinare i punti di estremo relativo della seguente funzione

$$f(x,y) = \cos\{|x-y|(y+x^2)\} - \{|x-y|(y+x^2)\}\,.$$

Qualcuno dei punti trovati é anche di estremo assoluto?

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y}{[(x-1)^2+y^2]^\alpha} + x + y & (x,y) \neq (1,0) \\ 1 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali

i) f é continua nel punto $(1,0)$

ii) esistono le derivate direzionali nel punto $(1,0)$

iii) f é differenziabile nel punto $(1,0)$.

Gruppo 2

1) Determinare i punti di estremo relativo vincolato per la funzione $f(x,y) = xy$ soggetta al vincolo $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$. Qualcuno dei punti trovati é anche di estremo assoluto?

2) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \left(2x\log(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2} \right) dx + \frac{2x^2 y}{x^2+y^2}\, dy$$

essendo γ la curva di equazioni $x(t) = \cos 2t, y(t) = 2\sin 2t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_A \frac{x^2+2y^2}{xy}\, dxdy$$

essendo $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \le 9, x^2+y^2 \ge 1, \sqrt{3}x \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (Q-Z) del 07-04-2003

Il candidato risolva almeno un esercizio per ognuno dei due gruppi seguenti

Gruppo 1

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^\alpha\, x} \ : \ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

al variare del parametro reale positivo α.

2) Determinare i punti di estremo relativo della seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 3|x|\, y + 2\, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,.$$

Quindi considerata la restrizione di f all'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

determinarne gli estremi assoluti.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{y^2\,|x|}$$

determinarne il campo di esistenza X. Provare che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ esiste finito il

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lambda_{(x_0,y_0)} \,.$$

Posto, poi,

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in X \\ \\ \lambda_{(x_0,y_0)} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus X \end{cases}$$

dire se g è differenziabile in $(0,0)$.

Gruppo 2

1) Data la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{u^4 + 2u^2 \cos^2 u}\, du \,,\ y(t) = \sqrt{2}\,[t\cos t - \sin t] \qquad t \in [1,2]$$

provare che è regolare e calcolarne la lunghezza.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' - y'' - 2\,y' = x\,e^{kx}$$

al variare del parametro reale k.

3) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_A 4\,|z-1|\, dxdydz$$

essendo $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, 1 \leq 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 2x \leq y\big\}$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (Q-Z) del 05-09-2003

1) Determinare lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $x^3\,3^x$ precisando l'intervallo di sviluppabilità.

2) Determinare l'area della regione piana comune al cerchio di equazione $5x^2+5y^2=8$ ed all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

3) Calcolare la lunghezza della curva piana di equazioni parametriche

$$x(t)=\pi+t(\cos^4 t+\sin^4 t+2^{-1}\sin^2(2t))\,,\; y(t)=\int_0^t \sqrt{\arcsin^2 u(\arcsin^2 u+2)}\,du$$

dove $t\in[0,1]$

4) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'=\frac{2e^x}{e^y+e^{-y}}$$

tali che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (Q-Z) del 08-07-2003

1) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$$

2) Determinare i punti di estremo relativo della seguente funzione

$$f(x, y) = |y - 3|\,(y - 4x^2 + 9) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,.$$

3) Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x = u\,v\,,\; y = u - v\,,\; z = u + v$$

supponendo che $u^2 + v^2 \leq 1$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x\,\sqrt{y-1}}{x^2 + x - 2}$$

sotto la condizione $y(0) = 2$

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (Q-Z) del 16-12-2003

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale e assoluta della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n+2)(x+n)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

2) Determinare una funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tale che la forma differenziale lineare

$$\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) \phi(x)\, dx + (x^2 + y^2)\, \phi(x)\, dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e quindi calcolarne le primitive.

3) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3}\, dxdy$$

dove D è la parte di piano, che si trova nel primo quadrante, compresa fra gli assi cartesiani e la curva di equazione $x^3 + y^3 = 1$.

4) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del 15-04-2004

1) Data la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le \frac{1}{n^2} \\ \frac{\cos(nx)}{n} & \frac{1}{n^2} < x \le 1 \end{cases} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

studiarne la convergenza puntuale ed uniforme. Quindi dire se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in $[0,1]$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = xy(1-x^2-y^2) - \sin[xy(1-x^2-y^2)] \; : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

determinarne i punti di estremo relativo ed assoluto nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_A (x^2+y^2)^{-2} \, dxdy$$

essendo $A = \{(x,y) : y \ge x, x^2+y^2 \le 1, x+y \ge 1\}$.

4) Data l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = \frac{x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

determinare le sue soluzioni aventi codominio contenuto nell'intervallo $]-1,1[$, tali che $y(0) = 0$, precisandone il dominio.

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova in itinere di

Analisi Matematica II del 21-05-2004

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' - 5\,y' + 4\,y = e^x\,,\ y(0) = 3\,,\ y'(0) = -1$$

Risoluzione. Innanzitutto si risolva l'equazione omogenea associata. Essa ha come integrale generale l'insieme

$$\{c_1\,e^x + c_2\,e^{4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

dal momento che $\alpha = 1, \alpha = 4$ sono le due soluzioni dell'equazione caratteristica $\alpha^2 - 5\,\alpha + 4\ = 0$.

Cerchiamo adesso un integrale particolare dell'equazione completa; dal momento che il termine noto è del tipo

$$e^{hx}[P_1(x)\,\cos(kx) + P_2(x)\,\sin(kx)]$$

con $h = 1, k = 0, P_1(x) = 1, P_2(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che il numero $h + i\,k = 1$ è soluzione (con molteplicità 1) dell'equazione caratteristica, la cercata soluzione è del tipo $y_0(x) = Axe^x$; per sostituzione diretta nell'equazione completa si ha così che $A = -\,\frac{1}{3}$; in questo modo l'integrale generale dell'equazione completa è

$$\left\{c_1\,e^x + c_2\,e^{4x} - \frac{1}{3}xe^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Imponendo, poi, le condizioni iniziali si trova facilmente che deve essere $c_1 = \frac{38}{9}$, $c_2 = -\frac{11}{9}$ cosicché la soluzione del problema di Cauchy cercata è la funzione

$$y(x) = \frac{38}{9}\, e^x - \frac{11}{9}\, e^{4x} - \frac{1}{3} x e^x \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2) Studiare la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^3}{1+nx^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

determinandone, innanzitutto, l'insieme E di convergenza puntuale. Dire poi se in E si ha convergenza uniforme, giustificando la risposta; in caso di risposta negativa, determinare sottoinsiemi di E nei quali vi è convergenza uniforme.

Risoluzione. Denoteremo con f_n il generico termine della serie. Osserviamo innanzitutto che

(i) per $x = 0$ la serie converge, poiché $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) ognuna delle f_n è dispari

cosicché possiamo studiare la serie data solo per $x \in]0, , +\infty[$. In tale insieme essa risulta una serie a segni alterni che potrebbe essere studiata utilizzando il criterio di Leibnitz; è immediato vedere che $\lim_n \frac{x^3}{1+nx^2} = 0$ per ogni $x \in]0, +\infty[$; inoltre, per gli stessi x si ha $\frac{x^3}{1+nx^2} \geq \frac{x^3}{1+(n+1)x^2}$ (si osservi che per $x > 0$ ogni f_n è positiva e quindi tale disuguaglianza è l'altra ipotesi del Teorema di Leibnitz che occorre verificare per poter applicare tale Criterio; altrimenti, se le f_n fossero state negative, si sarebbe dovuto provare che $\frac{x^3}{1+nx^2} \leq \frac{x^3}{1+(n+1)x^2}$). Vi è così convergenza puntuale in tutto $\mathbb{R}$. Passiamo, ora, allo studio della convergenza uniforme; dal momento che le f_n non sono limitate in $\mathbb{R}^+$ (è sufficiente calcolarne il limite per $x \to +\infty$), e quindi che (f_n) non può convergere a zero uniformemente, si può senz'altro asserire che la condizione necessaria per la convergenza uniforme non è soddisfatta in $\mathbb{R}^+$; per sperare di avere convergenza uniforme in qualche sottoinsieme occorre che esso sia limitato, di modo che si impedisca ad x di andare verso ∞; in un insieme del tipo $[0,a], a \in \mathbb{R}^+$, ogni f_n è crescente, come facilmente si vede studiando il segno della derivata, cosicché $sup f_n = f_n(a)$; utilizzando la maggiorazione dell'errore del Teorema di Leibnitz, dove S denota la funzione somma ed (S_n) la successione delle somme parziali della serie, si ha

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \frac{x^3}{1+(n+1)x^2} \leq \frac{a^3}{1+(n+1)a^2} \qquad \forall x \in [0,a]$$

e poiché $\frac{a^3}{1+(n+1)a^2} \to 0$ si può asserire che vi è convergenza uniforme in $[0,a]$ e quindi, grazie a precedenti osservazioni, in ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

3) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{|x|^\alpha\, y^2}{x^4+y^4} & \end{cases} \quad : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

studiarne la continuità, la derivabilità in ogni direzione e la differenziabilità in (0,0).

Risoluzione. Osserviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha\, y^2}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\, y^2}{x^4+y^4}\, |x|^{\alpha-2} = 0$$

se $\alpha > \mathbf{2}$ perché prodotto di una funzione infinitesima, cioè $|x|^{\alpha-2}$, per una limitata, cioè $\frac{x^2\, y^2}{x^4+y^4}$ (**ACHTUNG!** $\frac{y^2}{x^4+y^4}$ **non è affatto limitata** come la maggior parte ha affermato); quindi per $\alpha > 2$ c'è senz'altro continuità; ma ciò non basta, poiché occorre ancora esaminare il caso $0 < \alpha \leq 2$; in questo caso restringendo la funzione alla prima bisettrice si ottiene

$$f(x,x) = \frac{|x|^{\alpha+2}}{2\, x^4}$$

il cui limite, per $x \to 0$, è $\frac{1}{2}$ se $\alpha = 2$, $+\infty$ se $0 < \alpha < 2$; in questi casi non vi è continuità (**ANCORA ACHTUNG! L'uso di restrizioni è sufficiente se si vuole

negare che una f sia continua o derivabile o differenziabile in un punto, ma non basta per asserire che essa sia continua o derivabile o differenziabile). Passiamo, ora, allo studio della derivabilità; innanzitutto osserviamo che f ristretta ai due assi vale identicamente 0, per ogni valore di $\alpha > 0$, e quindi si può subito asserire che le derivate parziali di f in $(0,0)$ esistono, e valgono 0, qualunque sia α. Consideriamo, ora, un versore (v_1, v_2) che non sia uno dei due versori degli assi (quindi con $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$); si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha+2}\,|v_1|^\alpha\, v_2^2}{t^4(v_1^4 + v_2^4)}\,\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha-2}}{t}\,\frac{|v_1|^\alpha\, v_2^2}{v_1^4 + v_2^4} = 0$$

se $\alpha > 3$; mentre, se $\alpha = 3$ il limite precedente non esiste perché il limite destro vale $\frac{|v_1|^\alpha\, v_2^2}{v_1^4+v_2^4}$, mentre quello sinistro il numero opposto (entrambi non nulli, per via dell'ipotesi sul versore (v_1, v_2)); infine, se $\alpha < 3$, il precedente limite non esiste perché il limite destro vale $+\infty$, mentre quello sinistro vale $-\infty$; possiamo allora concludere che le derivate direzionali di f nell'origine, diverse dalle derivate parziali, esistono se e solo se $\alpha > 3$. Concludiamo studiando la differenziabilità di F in $(0,0)$; dal momento che la differenziabilità implica sempre l'esistenza di tutte le derivate direzionali, la funzione sarà senz'altro non differenziabile per $\alpha \leq 3$. Per $\alpha > 3$ si ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - (\nabla f(0,0), (h_1, h_2))}{\|(h_1, h_2)\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1|^\alpha\, h_2^2}{h_1^4 + h_2^4}\,\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2\, h_2^2}{h_1^4 + h_2^4}\,\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\,|h_1|^{\alpha-3} = 0$$

poiché prodotto di funzioni limitate, cioè $\frac{h_1^2\, h_2^2}{h_1^4+h_2^4}$ e $\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$, per $|h_1|^{\alpha-3}$ infinitesima, dato che $\alpha > 3$; concludiamo così che f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 3$.

4) Trovare i punti di estremo relativo della funzione

$$f(x,y) = (xy + y^2)\,|y^2 - x|\, e^{(xy+y^2)\,|y^2-x|} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

precisando, poi, se si tratta di punti di estremo assoluto.

Risoluzione. La funzione f è composta dalle funzioni

$$g(t) = te^t \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; t(x,y) = (xy + y^2)\,|y^2 - x| \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

La funzione g è derivabile con derivata uguale a $g'(t) = (1+t)e^t$ che è positiva se e solo se $t > -1$, negativa se e solo se $t < -1$, nulla se e solo se $t = -1$; possiamo quindi asserire che $t = -1$ è punto di minimo assoluto per g e quindi tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ di coordinate soddisfacenti la condizione $t(x,y) = -1$ sono punti di minimo assoluto per f; tale insieme è non vuoto (per esempio il punto $(-\sqrt{2}, 1)$ ne fà parte). Studiamo, adesso, la funzione t esaminando prima il

caso $y^2 - x > 0$

risulta $t(x,y) = (xy + y^2)\,(y^2 - x)$; si ha il seguente gradiente

$$\nabla t(x,y) = (y(y^2 - y - 2x), 4y^3 + 3xy^2 - 2xy - x^2) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

da $t_x = 0$ si deduce che deve aversi $y = 0$ oppure $x = \frac{y^2 - y}{2}$; per sostituzione nella equazione $t_y = 0$ da $y = 0$ deduciamo $x = 0$, mentre da $x = \frac{y^2-y}{2}$ deduciamo che y=-1 (e quindi $x = 1$) o che $y = -\frac{3}{5}$ (e quindi $x = \frac{12}{25}$); dei tre punti ottenuti nessuno soddisfa la condizione $y^2 - x > 0$, cosicché essi non vanno considerati.

Studiamo, ora, il

caso $y^2 - x < 0$;

poiché stavolta risulta $t(x,y) = -\,(xy + y^2)\,(y^2 - x)$, il precedente calcolo conduce ancora a determinare le seguenti soluzioni dell'equazione $\nabla t = (0,0)$

$$(0,0)\,,\;(1,-1)\,,\;\left(\frac{12}{25}, -\frac{3}{5}\right);$$

solo il terzo punto soddisfa la condizione $y^2 - x < 0$; per determinarne la natura occorre stabilire il segno degli autovalori della matrice Hessiana, calcolata nel punto; a tal fine si ha

$$t_{xx} = 2y \, , \, t_{xy} = t_{yx} = -3y^2 + 2x + 2y \, , \, t_{yy} = -12y^2 - 6xy + 2x$$

da cui è facile dedurre che gli autovalori sono negativi, di modo che il punto suddetto è di massimo relativo per t; dal momento che t è positiva nel suddetto punto, tenendo conto del fatto che g è crescente per $t > -1$, deduciamo che il punto è di massimo relativo anche per f.

Infine studiamo il

caso $y^2 - x = 0$

utilizzando la definizione per capire se i punti della parabola di equazione $y^2 - x = 0$ sono punti di estremo per t; vediamo per quali punti di $\mathbb{R}^2$ si ha $t(x,y) \geq t(y^2, y)$ e per quali $t(x,y) \leq t(y^2, y)$; è ovvio che è sufficiente studiare la prima disequazione che equivale alla seguente altra $(xy + y^2)|y^2 - x| \geq 0 \iff xy + y^2 \geq 0$ che è soddisfatta da tutti i punti tali che $y \geq 0, x + y \geq 0$ oppure tali che $y \leq 0, x + y \leq 0$; utilizzando il successivo disegno, possiamo dire che i punti cercati sono quelli degli angoli $A\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$ contrassegnati dal segno $+$, mentre i punti degli angoli $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ contrassegnati dal segno $-$ soddisfano la disuguaglianza contraria; possiamo concludere che i punti della parabola aventi $y > -1, y \neq 0$, sono punti di minimo relativo per t, quelli con $y < -1$ sono punti di massimo relativo, mentre i punti $(0,0)$ e $(1,-1)$ non sono punti di estremo per t (in ogni loro intorno esistono punti di $\mathbb{R}^2$ in cui sono soddisfatte entrambi le disuguaglianze sopra considerate); dal momento che t sulla parabola vale 0 e che g cresce per $t > -1$, possiamo concludere che i punti della parabola aventi $y > -1, y \neq 0$, sono punti di minimo relativo anche per f, quelli con $y < -1$ sono punti di massimo relativo anche per f, mentre i punti $(0,0)$ e $(1,-1)$ non sono punti di estremo per f. Infine, osserviamo che la restrizione di f alla retta $x = 0$ ha limite uguale a $+\infty$ per $y \to +\infty$, cosicché i punti di massimo relativo ottenuti in precedenza non possono essere punti di estremo assoluto.

Ingegneria Informatica

Prova in itinere del giorno 24-06-2004 di

Analisi Matematica II

1) Data la curva regolare a tratti di equazioni parametriche

$$x(t) = \frac{e^{t+|t|} + e^{-(t+|t|)}}{4} \quad , \quad y(t) = t \quad , \quad t \in [-1, 1]$$

calcolarne la lunghezza.

2) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_A \frac{x}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq 2y \leq x^2 + 2\,y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

3) Dire se il cambiamento di variabili seguente

$$\begin{cases} u = \sqrt{xy} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$$

è un diffeomorfismo in ognuno dei seguenti insiemi aperti $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > x > 0\}$.

4) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\frac{y^2}{x^2} \, dx + \left\{ \sin 2y \log(1 + \cos^4 y) - 2\,\frac{y}{x} \right\} dy$$

esteso ad una qualunque curva regolare a tratti di punto iniziale il punto di coordinate $(1, 0)$ e punto finale il punto di coordinate $(2, 2^{-1}\,\pi)$, avente sostegno contenuto nel semipiano dei punti con ascissa positiva.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 01-07-2004

Il candidato risolva almeno tre esercizi, due in un gruppo ed uno nell'altro gruppo

Gruppo 1

1) Data la funzione

$$f(x) = |\cos x| \, : [-\pi, \pi] \to [0, +\infty[$$

scriverne lo sviluppo in serie di Fourier; quindi calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4\,n^2 - 1}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2(y^2 + |x|^{3/2})\,(x^2+y^2)^{-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità nell'origine.

Qualora possibile scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nell'origine.

3) Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x\,, \quad y(0) = 0$$

Gruppo 2

1) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T y^3 e^{\sqrt{x^2+y^4}} (x^2+y^4)^{-1}\, dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2+y^4 \leq 4\}$

2) Data la forma differenziale lineare

$$y\left(\log \frac{y}{x} - 1\right) dx + x\left(\log \frac{y}{x} + 1\right) dy$$

determinare il campo di esistenza X delle sue componenti e quindi dire se essa è esatta in $X \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$, eventualmente trovandone ivi le primitive.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x+y^2} \qquad\qquad x > 0$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 19-07-2004

Il candidato risolva almeno tre esercizi, due in un gruppo ed uno nell'altro gruppo

Gruppo 1

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2+1)\, e^{x\sqrt{n}}}{n}$$

studiarne la convergenza semplice ed uniforme.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{(x^2+y^2)^\alpha + x^2y^4} + 1 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità nell'origine al variare del parametro reale positivo α. Qualora possibile scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nell'origine.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 9\,y' + 20\,y = e^{-3x}\,\sin e^x$$

Gruppo 2

1) Provare che l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 + y^4 + 24xy - 128 = 0\}$$

è chiuso e limitato. Quindi determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $F(x, y) = x^2 + y^2$ nell'insieme E.

2) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\!\!\int_T \frac{(x^3 + y^3)^2}{(x^2 + y^2)^3}\, dxdy$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 0, x^3 + y^3 + 2xy > 0\}$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2}\, dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy$$

determinare il campo di esistenza X delle sue componenti e quindi calcolare il suo integrale curvilineo sulla curva di equazioni

$$x = x \in [0, 2\pi]\,, \qquad y = 1 + \cos^2 x.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 06-09-2004

Il candidato risolva almeno tre esercizi, due in un gruppo ed uno nell'altro gruppo

Gruppo 1

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\ln(x^2+1)}}$$

studiarne la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = |x^2 + 2y|\,(x^2 + 2xy)$$

determinarne tutti i punti di estremo relativo.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 5y = x + \sin 2x$$

Gruppo 2

1) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_T xy\,\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, x^2 + y^2 + 4y \leq 0\}$

2) Data la forma differenziale lineare

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}\, dx + \frac{x^2 - 6y^2}{\sqrt{x^2 - 3y^2}}\, dx$$

determinare, se esiste, quella primitiva U tale che $U(-1,0) = 0$.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 21-09-2004

Il candidato risolva almeno tre esercizi, due in un gruppo ed uno nell'altro gruppo

Gruppo 1

1) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ continua e limitata studiare la successione di funzioni seguente

$$f_1 = f, \qquad f_{n+1} = \frac{f_n \operatorname{arctg} f_n}{2}$$

relativamente alla convergenza puntuale e uniforme. Dire poi se la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = x^4 + \operatorname{arctg}(y + x^2) - \operatorname{arctg} y$$

determinarne tutti i punti di estremo relativo, precisando se si tratta di estremi assoluti.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \sin x$$

Gruppo 2

1) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

2) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_T (y - x^2)\ \ln(x + x^2)\, dxdy$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq y - x^2 \leq 2, 3 \leq x + y \leq 4\}$

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = -\frac{x + 4yx + 1}{2x^2 + 3y^2 + 3} \qquad y(0) = 0\,.$$

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 07-10-2004

Il candidato risolva almeno tre esercizi, due in un gruppo ed uno nell'altro gruppo

Gruppo 1

1) Dire se la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\mathrm{n}+1)}{(n+1)^2}\, x^n$$

converge uniformemente e/o totalmente nell'intervallo $[-1, 1]$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - [\operatorname{arctg}(y+x^2) - \operatorname{arctg} y]$$

determinarne tutti i punti di estremo relativo, precisando se si tratta di estremi assoluti.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' + \frac{6x}{1+3x^2} y = \operatorname{arctg} x$$

Gruppo 2

1) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_A 2y^3 e^{\sqrt{x^2+y^4+z^2}}(x^2+y^4+z^2)^2\,dxdydz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq y \leq 1, x^2 + y^4 + z^2 \leq 4\}$

2) Dire per quali valori del parametro reale λ la seguente forma differenziale lineare

$$\frac{x+\lambda y}{(x+y)^2}\,dx + \frac{y}{(x+y)^2}\,dy$$

è esatta nell'aperto stellato $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 0\}$. Per i valori di λ ottenuti calcolare l'integrale curvilineo della suddetta forma esteso alla curva di equazioni

$$x(t) = t + \cos^2 t, y(t) = 1 + \sin^2 t, t \in [0, \pi]$$

3) Risolvere al variare del parametro reale μ la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x - \mu\, y + 1}{x + 3y + 2}$$

Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (ORP-Z) del 22-01-2005

1) Risolvere l'equazione differenziale seguente

$$y' = \frac{x + 2y}{1 - x}$$

2) Studiare la convergenza semplice ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n \log^2(n+2)}$$

Dire anche se essa converge totalmente in qualche sottoinsieme dell'insieme in cui converge uniformemente, giustificando la risposta .

3) Studiare la funzione

$$f(x,y) = \frac{1 - [|x-y|\,(x+y) - 2]^2}{1 + [|x-y|\,(x+y) - 2]^2}$$

per determinarne gli eventuali punti di estremo relativo.

4) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

essendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le |x| + |y| \le 2\}$

Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II (ORP-Z) del 18-02-2005

1) Risolvere l'equazione differenziale seguente

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2) Studiare la convergenza semplice ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + \sqrt{n}}{n^2 + x^{2n}}$$

Vi è convergenza totale in qualche sottoinsieme dell'insieme di convergenza semplice?

3) Studiare la funzione

$$f(x,y) = [|x^2 - y|\,(x+y)]\,\mathrm{arctg}\,[|x^2 - y|\,(x+y)]$$

per determinarne gli eventuali punti di estremo relativo.

4) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

essendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le y\,,\, x^2 + y^2 \le y\}$

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova in itinere di

Analisi Matematica II (ORP-Z) del 12-05-2005

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale e assoluta della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n[1+|n^2-x^2|]} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \ : \ [0, 2\pi[\ \to \mathbb{R}$$

estenderla ad una funzione dispari $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π. Quindi scrivere la serie di Fourier di $\tilde{f}$, dire dove essa converge e quale ne è la funzione somma, giustificando le risposte. Calcolare, infine, la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

3) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$y'' + 3y' - 4y = \sin(2x)\,, \ \ y(0) = y'(0) = 1$$

$$y' = (1-y^2)\,(2x+3)\,, \ \ y(0) = -2$$

ogni volta precisando dominio e legge di definizione delle soluzioni.

Ingegneria Informatica

Prova in itinere sullo studio di serie di funzioni

Analisi Matematica II (ORP-Z) // 10-06-2005

1) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x\,\sin^4 x}{1+n^3\,x^3}$$

provare che essa converge totalmente sia in $[0,1]$ che in $[1,+\infty[$

2) Studiare la serie seguente determinandone gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[log(x-1)]^{2n}}{2n+1} \qquad\qquad x>1$$

e calcolarne la funzione somma

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova in itinere di

Analisi Matematica II (ORP-Z) del 25-06-2005

1) Data la funzione

$$f(x,y) = |x|^{\beta} \log\left(x^2 + y^2\right) \,:\, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

dire per quali valori del parametro reale positivo β essa è prolungabile per continuità nell'origine, studiando quindi la derivabilità direzionale e la differenziabilità del prolungamento nell'origine, sempre al variare di β .

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^4 + y^2}$$

determinarne gli estremi assoluti nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x \le \sqrt{y^3}, y \le x^3\}$.

3) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_A \frac{x-y}{z}\, dx\, dy\, dz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \le z \le (x+y)^2, xy \le 2\}$.

4) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Ingegneria Informatica

Prova scritta del giorno 01-07-2005 di

Analisi Matematica II

1) Studiare la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n + \sqrt{n}}{n^2+1}$$

determinandone i vari tipi di convergenza.

2) Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{(1+y)\,y}{1+2y}\,x^3$$

3) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y) = y^2(x^2+y^2-2x)$$

nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 4,\ x^2+y^2-2x-2y \le 0,\ y \ge 0\,\}$$

4)Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \left(\log y + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy$$

essendo γ il sostegno di una curva regolare di parametrizzazione $x(t) = t + \cos^3 t, y(t) =$

$1 + \sin^2 t, t \in [0, 2\pi]$.

Ingegneria Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica II (ORP-Z)

del giorno 15-07-2005

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{1}{n^2}-\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right]x^n$$

2) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'=\frac{y^2}{1+x^2}$$

ogni volta determinando il dominio della soluzione trovata.

3) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x,y)=x\,|y|(x+1)+x$$

nell'insieme

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2-2\le y\le 2-x^2\}$$

4) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)(x^2+y^2)}$$

essendo

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 1\le x^2+y^2\le 2x\}.$$

Corso di studi in Ingegneria Informatica

Prova scritta dell'esame di

Analisi Matematica II del giorno 07-09-2005

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n\,!)}$$

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \log \frac{x^2 - 1 + y}{(y-3)(3-x)}$$

determinarne i punti di estremo relativo ed assoluto, se esistono, nel campo di esistenza.

3) Calcolare il volume dell'insieme seguente

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y^2 + z^2 - 4 \leq x \leq \sqrt{16 - y^2 - z^2}\}$$

4) Risolvere il Problema di Cauchy

$$y' = 2xy + y^2\,, \qquad y(0) = 1$$

determinando il dominio delle soluzioni.

5) Data la forma differenziale lineare

$$2xy\phi(z)\,dx + x^2\phi(z)\,dy + \frac{2x^2yz}{1+z^2}\,dz$$

determinare, se ne esistono, funzioni $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ in modo che essa sia esatta in $\mathbb{R}^3$ e quindi trovarne le primitive.