

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 7-2-1996 - c.1

1) Dire se esistono i limiti seguenti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + (x+y)^2}{2x + y - (x+y)^2}$$

ed eventualmente calcolarli.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = |\arctg [x^4 + y^4 - (x - y)^2]|$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_A \frac{1}{xy} dx dy$$

essendo $A = \{(x, y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2)\}$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 7-2-1996 - c.2

1) Determinare l'insieme X di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n (x+1)^2$$

calcolando la funzione somma. Tale serie risulta totalmente convergente in $X \cap]-\infty, 0]$?

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione $f(x, y) = x^2 - y$ sotto la condizione $g(x, y) = \log(x^2 + y) - y = 0$

3) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale seguente

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

esteso alla curva γ di equazioni parametriche $x = x, y = \cos x$ con $x \in [0, 2\pi]$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 7-2-1996 - c.3

1) Studiare la successione di funzioni

$$f_n(x) = x(x+1)[1 - (-x)^n]$$

determinandone l'insieme X di convergenza e la funzione limite f . Studiare poi la continuità di f e la convergenza uniforme di (f_n) a tale f in $X \cap]-\infty, 0]$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto della funzione

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cosh[(x^2-y^2)(x^2-1)]}$$

3) Calcolare l'integrale doppio seguente

$$\int \int_D x\sqrt{y} dx dy$$

essendo D il dominio del primo quadrante delimitato dagli assi coordinati e dall'arco di curva di equazioni parametriche $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + 9y' + 20y = e^{-3x} \sin x$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 7-2-1996 - c.4

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n(x^2 + \lambda)}$$

provare che essa converge in $]0, +\infty[$, per di piú uniformemente, per qualunque valore del parametro reale positivo λ . Lo stesso risultato continua a valere se $\lambda = 0$?

2) Provare che l'equazione

$$f(x, y) = 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$$

definisce in un intorno del punto $x = 1$ una sola funzione implicita $y = y(x)$ derivabile e tale che $y(1) = -\log\sqrt{e-1}$. Calcolare inoltre $y'(1)$

3) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

4) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int \int \int_D \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$$

essendo $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 27-2-1996 - c.1

1) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{(n+1)x}{e^{(n+1)x^2}} + 1 \right) x e^{x^2}$$

determinare l'insieme X di convergenza e la funzione limite. Si ha convergenza uniforme in X ?

2) Date le funzioni

$$f(x, y) = x^2 - y \quad e \quad g(x, y) = \log(x^2 + y) - y + 1$$

provare che esiste un punto dell'insieme $g(x, y) = 0$ in cui si annulla il gradiente di g . Dire quindi se tale punto è un punto di estremo vincolato per f , sotto la condizione $g = 0$.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = xy + x\sqrt[4]{y} \quad , \quad y(0) = 1$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 27-2-1996 - c.2

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^{n^3}|}{n^2 2^{n^3-2}}$$

determinare l'insieme X in cui converge, studiando poi la convergenza totale.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = e^{-[x^4+y^4-2(x+y)^2]^2}$$

precisando se si tratta di estremi assoluti.

3) Calcolare l'area della superficie di equazioni parametriche

$$x = x, y = y, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{con} \quad (x, y) \in \left\{ \frac{x}{2} \leq y \leq x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2) \right\}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 27-2-1996 - c.3

1) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 + z^2 - xy$$

Tale funzione é dotata di estremi assoluti nel proprio insieme di definizione?

2) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int \int \int_D \frac{2z}{\frac{x^2}{4} + y^2 + 2} dx dy dz$$

essendo $D = \left\{ (x, y, z) : -2 \leq z \leq -\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) \right\}$

3) Risolvere l'equazione differenziale

$$\left(3x^2y^4 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + (4x^3y^3 + \cos y) dy = 0$$

trovando quell'integrale che verifica la condizione $y(1) = 0$. Scrivere quindi l'equazione della retta tangente al grafico della soluzione ottenuta nel punto di coordinate $(1, 0)$.

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 27-2-1996 - c.4

1) Dire, giustificando la risposta, se é possibile sviluppare in serie di Fourier il prolungamento periodico di periodo 3 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ed eventualmente calcolare la suddetta serie di Fourier.

2) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D e^{\frac{x^2}{4} + y^2} \left| \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right| dx dy$$

essendo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2y, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.

3) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + x \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 20-3-1996 per studenti fuori corso

1) Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} + 1 \right) \frac{x}{1+x^2}$$

determinare l'insieme X di convergenza e la funzione limite. Si ha convergenza uniforme in X ?

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = (x + y)|y - x^2| - e^{(x+y)|y-x^2|}$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Data la forma differenziale lineare

$$\frac{y^2}{x^2 + y^4} dx - \frac{2xy}{x^2 + y^4} dy$$

determinarne l'insieme di definizione X . Dire quindi se essa risulta esatta in X ed eventualmente determinarne le primitive.

4) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y_1'' = 4y_1' - 5y_1 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 15-6-1996

1) Determinare l'insieme X di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{1+n^2x^2}$$

Tale serie risulta totalmente convergente in $X \cap]0, +\infty[$ ed in $X \cap]1, +\infty[$?

2) Determinare il dominio X e gli eventuali punti di X che sono di estremo relativo per la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 3) \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Data la forma differenziale seguente

$$2xy^3 dx - (x^2y^2 + 3)dy$$

se ne determini il dominio X e si dica se essa é esatta in tale dominio. Qualora non risultasse esatta, si determini un fattore integrante per la stessa forma differenziale. Quindi, si risolva la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{2xy^3}{x^2y^2 + 3}$$

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 6-7-1996

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 4y^2 - 4}$$

determinarne il dominio X ; provare poi che il punto $P = (2, 0)$ é di accumulazione per X .

Studiare quindi i limiti seguenti, giustificando le risposte

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{1}{x^2 + 4y^2 - 4} \quad , \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(x^2 + 4y^2 - 4)}{x^2 + 4y^2 - 4}$$

2) Dire se la curva di equazioni parametriche

$$x(h) = \sin h \quad , \quad y(h) = \int_{\frac{\pi}{2}}^h \sqrt{1 - 2 \cos t} dt \quad h \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

é regolare ed in tale caso calcolarne la lunghezza. La curva data é anche semplice ?

Giustificare le risposte.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{x\sqrt{1-y^2}}{1+x^2} \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

precisando l'insieme di definizione della soluzione.

Consegna in due ore

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 1995-96

Prova scritta di Analisi Matematica II del 29-8-1996

1) Data la funzione seguente definita in $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ ponendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases}$$

dire in quali punti del dominio essa è continua, derivabile parzialmente e differenziabile.

2) Disegnare il sostegno γ della curva generalmente regolare di equazioni parametriche

$$x(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0, 1/4] \\ 1 + \cos(2\pi t + \pi) & t \in [1/4, 1/2] \\ 6 - 8t & t \in [1/2, 3/4] \\ 0 & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1/4] \\ 1 + \sin(2\pi t + \pi) & t \in [1/4, 1/2] \\ 1 & t \in [1/2, 3/4] \\ 4 - 4t & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

e calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{+\gamma} (x^{30} - y)dx + (x + y^{30})dy$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - y = \sqrt{1 + e^x}$$

Consegna in due ore