Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Edile - A.A. 1998-99
Prova scritta di Analisi Matematica II del 05-11-1999

Appello per studenti fuori corso

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^6}{(x^2+3y^4)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

studiare
(i) la continuità di f in $(0,0)$
(ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0,0)$
(iii) la differenziabilità di f in $(0,0)$.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2+y^2+1} + 2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

determinarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore precisando se si tratta di minimo assoluto e di massimo assoluto.

3) Data la curva piana γ di equazioni

$$x(t) = 2 + \cos^2 t\,,\ y(t) = 2 + \cos t \sin t \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2y}dx + \frac{x\,\mathrm{log}y + 1}{xy^2}dy.$$

4) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale seguente

$$y^{(4)} + 4y = \cos x + \sin x.$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C1

08-02-2000

1) Determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) è continua nell'origine
ii) è differenziabile nell'origine.

2) Provare che l'equazione

$$xyz + \sin(z-6) - 2(x + y + x^2y^2) = 0$$

definisce, in un intorno del punto $(1,1,6)$, z come funzione implicita di x e y. Stabilire, poi, se il punto $(1,1)$ è di estremo relativo per tale funzione implicita, eventualmente precisandone la natura.

3) Dire se la forma differenziale lineare

$$\left[\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right] dx + \frac{2xy}{x^2+y^2} dy$$

è esatta nel proprio dominio ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Calcolare l'integrale

$$\iiint_A ze^{-(x^2+y^2)}\, dxdydz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in R^3 : z \geq 0, z^2 \leq x^2+y^2 \leq 4z^2\}$.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C2

08-02-2000

1) Determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin[(x+y)^2]}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) è continua nell'origine
ii) è differenziabile nell'origine.

2) Provare che l'equazione

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x-y+z) = 0$$

definisce, in un intorno del punto $(0,0,0)$, z come funzione implicita di x e y. Stabilire, poi, se il punto $(0,0)$ è di estremo relativo per tale funzione implicita, eventualmente precisandone la natura.

3) Dire se la forma differenziale lineare

$$\frac{z}{x^2+z^2}dx + \frac{z}{y^2+z^2}dy - \left(\frac{x}{x^2+z^2} + \frac{y}{y^2+z^2}\right)dz$$

è esatta in $R \times R \times]0,+\infty[$ ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Calcolare l'integrale

$$\int\!\!\int_A (1+2x)(x^2+y)\log(1+4(x-y))\,dxdy$$

dove $A = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq x\}$.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C3

08-02-2000

1) Determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) è continua nell'origine
ii) è differenziabile nell'origine.

2) Determinare i punti dell'insieme $A = \{(x,y) \in R^2 : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8\}$ aventi distanza minima e massima dall'origine.

3) Dire se la forma differenziale lineare

$$\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right) dx - \left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{1+(x-y)^2}\right) dy$$

è esatta nel proprio dominio ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Calcolare l'integrale

$$\iiint_A ze^{-(x^2+y^2)}\, dxdydz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in R^3 : z \geq 0, 2(x^2+y^2) \leq z^2 \leq x^2+y^2+1\}$.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C4

08-02-2000

1) Determinare i valori del parametro reale positivo α per i quali la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} |x+y|^\alpha \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) è continua nell'origine
ii) è differenziabile nell'origine.

2) Determinare i punti dell'insieme $A = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy - 16 = 0\}$ aventi distanza minima dall'origine. Esistono punti di distanza massima?

3) Dire se la forma differenziale lineare

$$-\frac{xy^2}{x^4+y^4}dx + \frac{x^2y}{x^4+y^4}dy$$

è esatta nel proprio dominio ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Calcolare l'integrale

$$\iiint_A \left(1 + \sqrt{(xy)^2 + (x+z)^2 + (yz)^2}\right) y(z+x)\, dxdydz$$

dove $A = \{(x,y,z) \in R^3 : x > 0, y > 0, z > 0, (xy)^2 + (x+z)^2 + (yz)^2 < 4\}$.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C1

24-02-2000

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{nx^2}{e^{n|x|}} \qquad\qquad x \in R$$

studiarne la convergenza semplice, uniforme e totale.

2) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) = [-1 + |y|(x^2 + y^2 - 2x)]\,\mathrm{arctg}[-1 + |y|(x^2 + y^2 - 2x)]$$

nel suo dominio.

3) Calcolare l'integrale

$$\int\int_A (x^2 - y^2)\log[1 + (x+y)^4]\,dxdy$$

dove $A = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 2 - x\}$.

4) Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

verificante le condizioni

$$y(0) = 0, \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{xe^x} = 0$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C2

24-02-2000

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e^{\frac{1-nx^2}{n}}-e^{-x^2}\right] \qquad x \in R$$

studiarne la convergenza semplice, uniforme e totale.

2) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y)=\sinh[|y-x|(y-x^2)-1]^2$$

nel suo dominio.

3) Calcolare l'integrale

$$\iiint_A \frac{xyz}{1+(xy)^2}\,dxdydz$$

dove $A=\{(x,y,z)\in R^3 : z \le xy \le 2z, x \le y \le 2x, 1 \le z \le 2\}$.

4) Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale

$$y' \cosh y = e^x$$

verificante la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C3

24-02-2000

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{nx^2}{1+n^2x^2} \qquad\qquad x \in R$$

studiarne la convergenza semplice, uniforme e totale.

2) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}[-1+|y-x^2|(x+y)]^2$$

nel suo dominio.

3) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x+2y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,dy$$

dove γ è la curva regolare avente le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x(t) = 2+\sin t \\ \\ y(t) = 1+\cos^2 t+\cos t \end{cases}$$

orientata nel verso crescente delle $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale

$$e^{x+y}y' + x = 0$$

verificante la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.C4

24-02-2000

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sinh \frac{x}{1+nx^2} \qquad\qquad x \in R$$

studiarne la convergenza semplice, uniforme e totale.

2) Determinare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) = [|1+x-y|(1-x^2+y^2)-1] \sinh[|1+x-y|(1-x^2+y^2)-1]$$

nel suo dominio.

3) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x \sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y \sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

dove γ è la curva regolare avente le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x(t) = 2+\cos t \\ \\ y(t) = 1+\sin^2 t + \sin t \end{cases}$$

orientata nel verso crescente delle $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Trovare la soluzione y dell'equazione differenziale

$$y' = y\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

verificante la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II
per studenti fuori corso

04-05-2000

1) Siano date delle funzioni $g_n, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, con (g_n) convergente uniformemente a g in $\mathbb{R}$ ed una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Provare che la successione delle funzioni composte $(f \circ g_n)$ converge uniformemente alla funzione composta $f \circ g$. Vale lo stesso risultato se f è solo continua? Giustificare la risposta.

2) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

determinare l'insieme X dove essa converge. Studiarne poi la convergenza uniforme e totale negli insiemi $X \cap [1, +\infty[$ e $X \cap [0, 1]$.

3) Determinare gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = z(x^2 + y^2) + 2xy$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

4) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_T \text{arcsen} y \, dxdydz$$

essendo

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 1, y^2 z^2 + x^2 - y^2 \leq 0\right\}.$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II
per studenti fuori corso

04-05-2000

1) Data la funzione
$$f(x, y) = |y|(x^2 + y^2)e^{-|y|(x^2+y^2)}$$
determinarne gli estremi relativi, precisando se si tratta di estremi assoluti.
2) Calcolare il seguente integrale curvilineo
$$\int_\gamma \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y}\, dx + \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{y^2 x}\, dy$$
essendo γ il sostegno della curva di equazioni parametriche
$$x(t) = t + \cos^2 t,\ y(t) = 1 + \sin^2 t, \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
3) Calcolare il seguente integrale triplo
$$\iiint_T \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + 1}\, dxdydz$$
essendo $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, y \geq 0, z \geq 0\}$.
4) Data l'equazione differenziale seguente
$$y'' + \frac{2x}{1 + x^2} y' = e^x$$
provare che ogni sua soluzione y tale che $y'(0) > 3$ è crescente.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II

13-06-2000

1) Studiare i limiti seguenti

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y-x+\log(1-xy+x^2)}{x(x-y)}\,, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x+\log(1-xy+x^2)}{x(x-y)}.$$

2) Data la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right).....\left(x+\frac{1}{2n-1}\right)}$$

determinare il sottoinsieme X di $[0,+\infty[$ dove essa converge. Provare, quindi, che in X non si ha convergenza uniforme.

3) Data la funzione

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2-1)(z-1)$$

determinarne i punti di estremo assoluto nell'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2-z \leq 0, z \leq 1\}.$$

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_T (x+y)e^{-(x+y)^2}\, dxdy$$

essendo

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+2xy \leq 1\,,\ x^2+y^2-2xy \leq 1\right\}.$$

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II

29-06-2000

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \left|\frac{nx^3}{1+n^3x^4}\right|\right) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

studiarne la convergenza semplice, uniforme e totale.

2) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto per la funzione

$$f(x,y) = \frac{4\sin(xy)}{4\sin^2(xy)+1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

3) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}, (x+y)^2 + (x-y)^2 \leq 2, 0 \leq x-y \leq x+y\}$.

4) Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Trovare almeno una funzione $\phi \in C^1(A)$ tale che la forma differenziale lineare

$$\phi(x,y)\, dx + \left[\frac{y}{x^2+y^2} + \chi(y)\right] dy$$

sia chiusa in A, dove $\chi \in C^1(\mathbb{R})$. Dire, poi, se tale forma differenziale lineare è anche esatta in A, giustificando la risposta.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II

11-09-2000

1) Studiare la convergenza semplice ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n\mathrm{arctg}(2|x|) + (n+1)^2}{(n^2+1)(1+x^2)}$$

2) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2}+|z|}$$

3) Data la forma differenziale lineare

$$\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dy$$

dire se essa è esatta nel proprio dominio ed eventualmente calcolarne le primitive.

4) Calcolare il seguente integrale

$$\iint_A \frac{x}{x+y}\, dx\, dy$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x^2 \le y \le 4x^2\}$.

Consegna in due ore

Corso di Laurea in Ingegneria Edile

Prova scritta dell'esame di
Analisi Matematica II.

27-09-2000

1) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2-x^2)}{y-x} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

dire in quali punti della retta $y = x$ essa è continua e differenziabile.

2) Data la funzione

$$f(x,y) = \left[x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 1\right] \operatorname{arctg} \left[x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 1\right]$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

3) Calcolare l'integrale seguente

$$\iiint_D \left[(x+y+z)^2 - 1\right] \, dx\, dy\, dz$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,,\ x^2 + y^2 \leq z\}$.

4) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' + \frac{x}{x^2-1}\, y = x\sqrt{y} \qquad\qquad x \in\,]-1, 1[\,.$$

Consegna in due ore