

Informatica

Prova in itinere del giorno 24-01-2005 di

Formazione Analitica 1

1) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin^2 x]^{\operatorname{tg} x}$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{|2x - x^2|}$$

e disegnarne il grafico.

3) Studiare la funzione

$$f(x, y) = \frac{1 - [|x - y| (x + y) - 2]^2}{1 + [|x - y| (x + y) - 2]^2}$$

per determinarne gli eventuali punti di estremo relativo.

Informatica

Prova scritta del giorno 14-06-2005 di

Formazione Analitica 1 (A-C)

1) Calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 2^{x^2}}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x^2 - x^2 e^{-x^2}}{x \log(1+x)}$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x+5|}{x+7}$$

e disegnarne il grafico.

3) Determinare gli estremi relativi ed assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 3.

Prova scritta di Formazione Analitica 1 (A-C)
del giorno 11-07-2005

1) Utilizzando la definizione di limite provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = +\infty$$

2) Determinare i valori del parametro reale positivo α , se ne esistono, per i quali il limite seguente

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y + y^{\frac{3}{2}} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)}{y^\alpha}$$

esiste finito, ma non nullo.

3) Studiare la funzione

$$f(x) = 2xe^{4-2x^2}$$

e disegnarne il grafico.

4) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy(x+1) + x$$

nell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

CdL in Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1(A-C)

del giorno 06-09-2005

1) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^{\frac{1}{\log x}} - e}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} - e}$$

2) Dato il parametro reale α , dire per quali suoi valori la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x |\sin x|^\alpha & x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile nel punto $x = 0$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = (x + 3)^{\frac{1}{3}} \left(x - \frac{3}{5}\right)^{-\frac{4}{3}} e^{2\log|x-1|}$$

e disegnarne il grafico

4) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = |\operatorname{arctg} [x^4 + y^4 - (x - y)^2]|$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

C.d.L. in Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1

del giorno 27-09-2005

1) Data la successione di primo termine un arbitrario numero reale $a \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ e di termine generale

$$a_{n+1} = a_n^3 - a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

dire per quali valori di a essa è

(i) non crescente

(ii) non decrescente.

Quindi, in ambo i casi, determinarne il limite.

2) Calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\log \frac{x+1}{x+2} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - e^{\arctg x}}{\arcsin x - \arctg x}$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = |\sin x| + |\sin(2x)|$$

e disegnarne il grafico

4) Dimostrare che per ogni $x \in [0, +\infty[$ si ha

$$\log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2(1+x)^2}$$

5) Determinare i punti di estremo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Corso di Laurea in Informatica

Prova in itinere del 17-12-2005

Formazione Analitica I (A-C)

1) Dimostrare attraverso il Principio di Induzione che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risoluzione. Dimostriamo la formula per $n = 1$; il suo primo membro vale $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3}$, così come il secondo membro vale $\frac{1}{3}$. Supponiamo adesso che la formula sia vera nel caso generico n e la dimostriamo nel caso successivo $n + 1$; assumiamo cioè la seguente

$$\text{Ipotesi: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1}$$

e proviamo la seguente

$$\text{Tesi: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n + 1}{2(n + 1) + 1} = \frac{n + 1}{2n + 3}.$$

Si ha così

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} + \frac{1}{4(n + 1)^2 - 1} = \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{4(n + 1)^2 - 1} =$$

$$\frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{[2(n + 1) - 1][2(n + 1) + 1]} = \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} =$$

$$\frac{n(2n + 3) + 1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n(2n + 2 + 1) + 1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n(2n + 2) + (n + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)} =$$

$$\frac{2n(n + 1) + (n + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{(2n + 1)(n + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{n + 1}{2n + 3}$$

cosicché si può asserire che la tesi è vera.

2) Determinare estremo inferiore ed estremo superiore dell'insieme

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2 + 128}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Risoluzione. Dal momento che gli elementi dell'insieme sono i termini di una successione cerchiamo di determinare un'eventuale monotonia della stessa. Posto $a_n = \frac{n}{n^2+128}, n \in \mathbb{N}$ vediamo per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$. A tal proposito svolgiamo i seguenti calcoli

$$\frac{n}{n^2 + 128} \leq \frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 128} \iff n[(n + 1)^2 + 128] \leq (n + 1)(n^2 + 128) \iff$$

$$n^3 + 2n^2 + 129n \leq n^3 + n^2 + 128n + 128 \iff n^2 + n - 128 \leq 0$$

L'ultima disequazione (di secondo grado) ha soluzione per i seguenti valori di $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{-1 - \sqrt{513}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{513}}{2}$$

Poiché la disuguaglianza a sinistra è sempre vera ($\frac{-1 - \sqrt{513}}{2} < 0 < n, n \in \mathbb{N}$), rimangono da determinare i valori di $n \in \mathbb{N}$ per i quali è soddisfatta l'altra. Dal momento che

$$22 < \sqrt{513} < 23 \iff \frac{21}{2} < \frac{-1 + \sqrt{513}}{2} < \frac{22}{2} = 11$$

possiamo dedurre che essa è vera per ogni $n \leq 10$; si ha allora

$$a_1 \leq \dots \leq a_{10} \leq a_{11} \geq a_{12} \geq \dots$$

da cui si deduce che $a_{11} = \max X$, mentre $\inf X = \min(a_1, \lim a_n) = \min\left(\frac{1}{129}, 0\right) = 0$ con tale $\inf X$ non minimo.

3) Calcolare il seguente limite

$$\lim_n \left[\left(2 - \cos \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha} - 1 \right]$$

al variare del parametro reale positivo α

Risoluzione. Dal momento che

$$\left(2 - \cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]} - 1$$

sarà sufficiente studiare il limite dell'esponente $n^\alpha \log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]$; a tal fine si ha

$$n^\alpha \log \left[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}\right] = n^\alpha \frac{\log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]}{1 - \cos \frac{1}{n}} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \frac{1}{n^2} =$$

$$n^{\alpha-2} \frac{\log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]}{1 - \cos \frac{1}{n}} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

Dato che

$$\lim_n \frac{\log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]}{1 - \cos \frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_n \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

per noti limiti notevoli, il valore del nostro limite dipende da quello di $\lim_n n^{\alpha-2}$; si ha

$$\lim_n n^{\alpha-2} = \begin{cases} 1 & \alpha - 2 = 0 \\ +\infty & \alpha - 2 > 0 \\ 0 & \alpha - 2 < 0 \end{cases}$$

da cui segue facilmente che

$$\lim_n n^{\alpha-2} \frac{\log[1 + 1 - \cos \frac{1}{n}]}{1 - \cos \frac{1}{n}} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \alpha - 2 = 0 \\ +\infty & \alpha - 2 > 0 \\ 0 & \alpha - 2 < 0 \end{cases}$$

e quindi che

$$\lim_n \left[\left(2 - \cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} - 1 \right] = \begin{cases} \sqrt{e} - 1 & \alpha - 2 = 0 \\ +\infty & \alpha - 2 > 0 \\ 0 & \alpha - 2 < 0 \end{cases}$$

4) Calcolare il limite seguente

$$\lim_n \frac{(n+1)! + (n+2)!}{n^2 e^n}$$

Risoluzione. Si ha

$$\frac{(n+1)! + (n+2)!}{n^2 e^n} = \frac{n!}{e^n} \frac{(n+1) + (n+1)(n+2)}{n^2}$$

e poiché

$$\lim_n \frac{(n+1) + (n+1)(n+2)}{n^2} = 1$$

mentre per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande

$$\frac{n!}{e^n} = \frac{1}{e} \frac{2}{e} \frac{3}{e} \dots \frac{n-1}{e} \frac{n}{e} \geq \frac{1}{e} \frac{2}{e} \frac{n}{e} \rightarrow +\infty$$

(per le precedente minorazione si tenga presente che $\frac{h}{e} > 1$ non appena $h \geq 3$) possiamo concludere che il limite in esame vale $+\infty$.

Corso di Laurea in Informatica

Prova in itinere del 26-01-2006

Formazione Analitica I (A-C)

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{|x-2|}{x-3}$$

e disegnarne il grafico.

3) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^2 \log x - 2x$$

ha un unico punto di minimo nel proprio campo di esistenza; si tratta di minimo relativo o assoluto?

Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 31-01-2006

1) Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{n}{2n^2 + 32}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

2) Dimostrare, utilizzando la definizione di limite, che

$$\lim_n \log \left[2 \sqrt{\frac{n+1}{4n+3}} \right] = 0$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x(3+x)|}$$

e disegnarne il grafico.

4) Dire se la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+2}$$

è invertibile nel proprio campo di esistenza ed, eventualmente, trovarne la funzione inversa.

Informatica

Prova in itinere di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 31-01-2006

1) Calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{2-x} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cos x} - e^{\frac{x}{\cos x}}}{\operatorname{arctg}^3 x}$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$

e disegnarne il grafico.

3) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}$$

determinare il più ampio intervallo contenente l'origine dell'asse \vec{x} in cui essa è invertibile.

Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 21-02-2006

1) Determinare il valore dei limiti seguenti

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(2n+1)!!}{n!}}, \quad \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^{2n}}$$

2) Dimostrare, utilizzando il Principio di Induzione, che la funzione derivata n-esima ($n \in \mathbb{N}$) della funzione $f(x) = \log x$, $x \in]0, +\infty[$, è la funzione

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n} \quad x \in]0, +\infty[$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = (\sqrt{|x|} - \sqrt{|x-1|}) e^{-\frac{|x|+x}{2}}$$

e disegnarne il grafico.

4) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x}}{x^\alpha}$$

al variare del parametro reale positivo α

Informatica

Prova in itinere di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 21-02-2006

1) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x}}{x^\alpha}$$

al variare del parametro reale positivo α

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} + \log[2x^2 + 2x + 1]$$

e disegnarne il grafico.

3) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - 4x^2}$$

determinarne il campo di esistenza, eventuali punti di estremo relativo ed assoluto, almeno un intervallo in cui risulta invertibile e, quindi, la legge di definizione della funzione inversa, di cui si chiede di precisare il dominio.

CdL in Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 07-03-2006

1) Data la funzione

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x}$$

determinare l'insieme immagine dell'intervallo $[-1, 0]$, mediante f

2) Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{\pi}{2}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + \operatorname{tg}^2 x}{(1 - \cos x)^2}$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{x + 4}}$$

e disegnarne il grafico.

Corso di Studi in Informatica

Prova scritta di Formazione Analitica 1 (A-C)

del giorno 13-06-2006

1) Determinare estremo inferiore e superiore del seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(\sin^2 x + x^2 \cos^2 x) \operatorname{tg} x}{(x^2 - 2x + 2 \sin x) \sin^3 x}$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) = (x - 1) \sqrt{2x - x^2}$$

e disegnarne il grafico

4) Provare attraverso il Principio di Induzione che

$$\sum_{h=1}^n (2h - 1) = n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Corso di Laurea in Informatica

**Prova scritta dell'esame di
Formazione Analitica I**

04-07-2006

1) Studiare il seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2 + 36} : n \in N \right\}$$

determinandone gli estremi inferiore e superiore, precisando se si tratta di minimo o massimo.

2) Studiare la successione

$$\left(\frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 1} \right)^{n^\alpha}$$

al variare del parametro reale positivo α .

3) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$$

studiarla e disegnarne il grafico.

4) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$$

determinarne il dominio D . Dire poi se essa risulta iniettiva negli insiemi $D \cap] - \infty, 0[$ e $D \cap] - 2, +\infty[$.

Corso di Laurea in Informatica

**Prova scritta dell'esame di
Formazione Analitica I (A-C)**

06-09-2006

1) Studiare il seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \frac{n}{n^2 + 36} : n \in N \right\}$$

determinandone gli estremi inferiore e superiore, precisando se si tratta di minimo o massimo.

2) Studiare la successione definita per ricorrenza ponendo

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{1 + a_n} \quad \forall n \in N$$

3) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$$

determinarne il dominio e gli eventuali punti di flesso.

4) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}$$

determinarne il dominio D . Dire poi se essa risulta iniettiva negli insiemi $D \cap] - \infty, 0[$ e $D \cap] - 2, +\infty[$.

CORSO di LAUREA in INFORMATICA

Prova scritta di Formazione Analitica I (A-C) (6 crediti)/ 27-09-2006

1) Dimostrare che il numero $n^3 + 6n^2 + 5n$ è divisibile per 3, per ogni $n \in \mathbb{N}$

2) Calcolare il seguente

$$\lim_n \frac{\log(n+1) - \log n}{\sin \frac{1}{n} \left(2^{\sin \frac{1}{n}} - 1 \right)}.$$

3) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x & x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \sin(2\pi x) & x \in]-1/2, 0] \\ \sqrt{2x^2 + x} & x \in [-1, -1/2] \end{cases}$$

determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo di f , precisando se si tratta di punti di massimo e minimo assoluto.

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2|x| + x^2 + x}{x + 1}$$

e disegnarne il grafico.