

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 13-02-2008. C1

1) Determinare il campo di esistenza X della funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 |z|) - \arcsin(x^2 + y^2 |z|)$$

e dimostrare che X è chiuso. È anche limitato? Trovare, quindi, gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f in X .

2) Data la funzione

$$g(x, y) = (x - 2)^2 + e^y - y^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determinare eventuali punti critici per y precisandone la natura.

3) Data la funzione

$$h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

provare che la sua restrizione all'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ è limitata e quindi calcolare l'integrale di h su E .

4) Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_{\gamma} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dy$$

essendo γ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

5) Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + 2ay' + (a^2 - a + 1)y = e^{-x}$$

al variare del parametro reale a

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

precisando in quale sottintervallo di $]0, +\infty[$ è definita ognuna delle sue soluzioni.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 13-02-2008. C2

1) Determinare il campo di esistenza X della funzione

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 |z|) - \arcsin(x^2 + y^2 |z|)$$

e dimostrare che X è chiuso. È anche limitato? Trovare, quindi, gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f in X .

2) Data la funzione

$$g(x, y) = (x - 2)^2 + e^y - y^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determinare eventuali punti critici per y precisandone la natura.

3) Data la funzione

$$h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^4} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

provare che la sua restrizione all'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0), y \geq 0, x \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$ è limitata e quindi calcolare l'integrale di h su E .

4) Calcolare l'integrale curvilineo seguente

$$\int_{\gamma} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dx + \frac{3y}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} dy$$

essendo γ la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

5) Scrivere le equazioni parametriche della curva intersezione della semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$, con il piano $x + y = 1$ e calcolarne la lunghezza

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ y_3' = y_2 - y_3 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 05-03-2008

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} e^{-\frac{x^2}{y^2}} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità in tutto \mathbb{R}^2 .

2) Data la funzione

$$g(x, y) = y^5 + \log \frac{x+y}{2} - xy : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x+y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita y avente per dominio un intervallo di centro il punto $x = 1$. Quindi dire se tale punto è punto di estremo relativo per essa, precisandone la natura.

3) Si consideri l'insieme piano A limitato dalle curve

$$y = x^4 - 1, y = x^4 + 1, y = -2x^2, y = -2x^2 + 2$$

e si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_A (x^3 + x)(2y + 2x^2 - x^4) dx dy$$

4) Data la forma differenziale lineare seguente

$$\frac{y^2}{x^2 y^2 + (x+y)^2} dx + \frac{x^2}{x^2 y^2 + (x+y)^2} dy$$

determinarne il campo di esistenza e quindi dire se essa è ivi esatta, giustificando la risposta.

5) Nel piano $y = 0$ sia data la curva di sostegno γ avente le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin t - \cos t \\ z(t) = \cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \right]$$

Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare γ attorno all'asse \vec{z} di un angolo giro.

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x y' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

in un intorno del punto $x = 1$. Esiste soluzione unica?

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 29-04-2008

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2 & -\pi \leq x \leq 0 \\ (x - \pi)^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

scrivere la serie di Fourier e provare che essa converge puntualmente ad f in $[-\pi, \pi]$.
Si ha convergenza uniforme? Dedurre, poi, la somma delle serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$
e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2}$.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2} + x & xy > 0 \\ xy + x & xy \leq 0 \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità in tutto \mathbb{R}^2 .

3) Determinare i punti della curva algebrica di equazione

$$x^4 + x^2 + y^2 - 2 = 0$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine, se esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale triplo

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

essendo $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 2^{-1}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5) Data la forma differenziale lineare seguente

$$\frac{x^2 + y^2 + 2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2 y^2 + y^4 + 2y}{x^2 + y^2} dy$$

calcolarne l'integrale curvilineo esteso al cammino di equazioni parametriche

$$x(t) = 1 + 2 \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 06-06-2008

1) Data la funzione

$$f(x, y) = xy \sqrt[4]{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

studiare l'esistenza e la continuità delle sue derivate direzionali in ogni punto di \mathbb{R}^2 . Dire, quindi, in quali punti essa è differenziabile, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = y^3 + 2y + e^{y-x^2} + x^2 - \cos(y-x) + h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $f(1, 1) = 0$. Per tali valori dire se l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 1$. In caso di risposta positiva, studiare la natura di tale punto per la funzione implicita.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo relativo vincolato di f sotto la condizione

$$g(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$

se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_A t^5 y^{-2} dt dy$$

essendo $A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^3 \leq y \leq 2t^3, t^3 + 2y \geq 1, t^3 + y \leq 1\}$.

5) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{2y}, \quad y(1) = 1.$$

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \\ y_3' = -y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 06-06-2008

1) Data la funzione

$$f(x, y) = xy \sqrt[4]{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

studiare l'esistenza e la continuità delle sue derivate direzionali in ogni punto di \mathbb{R}^2 . Dire, quindi, in quali punti essa è differenziabile, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = y^3 + 2y + e^{y-x^2} + x^2 - \cos(y-x) + h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $f(1, 1) = 0$. Per tali valori dire se l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno del punto $x = 1$. In caso di risposta positiva, studiare la natura di tale punto per la funzione implicita.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo relativo vincolato di f sotto la condizione

$$g(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$

se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_A t^5 y^{-2} dt dy$$

essendo $A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^3 \leq y \leq 2t^3, t^3 + 2y \geq 1, t^3 + y \leq 1\}$.

5) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = \frac{x^2 + y^2 + 2x}{2y}, \quad y(1) = 1.$$

6) Risolvere il seguente problema

$$y'' - 2y' + y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{xe^x} = 0$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 27-06-2008

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1} |y|^\alpha \sin x & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

studiarne la continuità e la differenziabilità nell'origine, al variare del parametro reale positivo α .

2) Data la funzione

$$f(x, y) = y^2 - 3xy + 2x^2 - (x - 1)e^{x-y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dire quante funzioni implicite l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno del punto $x = 1$. Determinare la natura del punto $x = 1$ per tali funzioni.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = (y - \arctg x)^2 (x^4 - x^6) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinarne i punti di estremo relativo, se ne esistono.

4) Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_A y^5 (x^2 + y^6)^{-1} dx dy$$

essendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^6 \leq 2, x \geq y^3 \geq -1, x \geq 0\}$.

5) Risolvere l'equazione differenziale seguente

$$x^2 y'' - xy' + y = x^3$$

6) Dire se la forma differenziale lineare seguente

$$[y(y^2 - x^2)(y^2 + x^2)^{-2}] dx + [x(x^2 - y^2)(y^2 + x^2)^{-2}] dy$$

è esatta ed eventualmente calcolarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 09-09-2008

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo assoluto nell'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 1, x > 0, y > 0\}$$

2) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{x-y} - 1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

provare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno dell'origine una funzione implicita. Determinare la natura del punto $x = 0$ per tale funzione.

3) Data la curva piana di equazioni

$$x(t) = 10(t - t^2), y(t) = \sin(2\pi t), t \in [0, 1]$$

determinare l'area della porzione di piano racchiusa dal sostegno della curva.

4) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_A \log(2x^2 + y^2 + 1) dx dy dz$$

essendo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x^2 + y^2 \leq 4, z \leq 2x^2 + y^2 + 1\}$$

5) Si calcoli il seguente integrale di superficie

$$\int_A \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$$

essendo A la porzione di superficie laterale del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ compresa fra i piani di equazione $z = 0$ e $z = 1$.

6) Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari seguente

$$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 07-11-2008. C1

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{(x^2 + 3y^4)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiare

- (i) la continuità di f in $(0, 0)$
- (ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0, 0)$
- (iii) la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = (x + y)|y - x^2| - e^{(x+y)|y-x^2|}$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Dire se la curva di equazioni parametriche

$$x(h) = \sin h \quad , \quad y(h) = \int_{\frac{\pi}{2}}^h \sqrt{1 - 2 \cos t} dt \quad h \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

è regolare ed in tale caso calcolarne la lunghezza. La curva data è anche semplice ?
Giustificare le risposte.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_A \frac{1}{xy} dx dy$$

essendo $A = \{(x, y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2)\}$

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale seguente

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

esteso alla curva γ di equazioni parametriche $x = x, y = \cos x$ con $x \in [0, 2\pi]$

6) Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 07-11-2008. C2

1) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{(x^2 + 3y^4)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiare

- (i) la continuità di f in $(0, 0)$
- (ii) l'esistenza e la continuità di f_x, f_y in $(0, 0)$
- (iii) la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

2) Determinare gli eventuali punti di estremo relativo della funzione

$$f(x, y) = (x + y)|y - x^2| - e^{(x+y)|y-x^2|}$$

precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

3) Dire se la curva di equazioni parametriche

$$x(h) = \sin h \quad , \quad y(h) = \int_{\frac{\pi}{2}}^h \sqrt{1 - 2 \cos t} dt \quad h \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

è regolare ed in tale caso calcolarne la lunghezza. La curva data è anche semplice ?
Giustificare le risposte.

4) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_A \frac{1}{xy} dx dy$$

essendo $A = \{(x, y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, -2(x-1) \leq y \leq -2(x-2)\}$

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale seguente

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy - 1)}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

esteso alla curva γ di equazioni parametriche $x = x, y = \cos x$ con $x \in [0, 2\pi]$

6) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' = xy + x\sqrt[4]{y} \quad , \quad y(0) = 1$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 05-12-2008

1) Studiare la continuità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate direzionali della funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2y+y^2z+z^2x}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

nell'origine.

2) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se esistono, della funzione

$$f(x, y) = x^4 - x^2y^2$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2 - 1\}$.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = e^y + x^2e^{-x}y + c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dire per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce un'unica funzione implicita $y = y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Posto, poi, $c = -2$ dire se la funzione implicita ottenuta ha punti di estremo relativo.

4) Data la forma differenziale lineare

$$\left(\frac{\log(1+y^2)}{\sqrt{x}} + \phi(x, y) \right) dx + \left(\frac{y\sqrt{x}}{1+y^2} + \cos y \right) dy$$

essendo $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, studiarne l'esattezza nel proprio campo di esistenza in funzione di ϕ , determinandone poi le eventuali primitive.

5) Calcolare l'integrale triplo della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

esteso all'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$$

6) Trovare l'area della porzione di superficie di equazione cartesiana

$$y = 1 + x^2 + z^2$$

con $y \leq 2$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 12-02-2010

1) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2+1}{2} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

provare che è possibile prolungarla a tutto \mathbb{R} in modo che il prolungamento \tilde{f} sia pari e di periodo 4. Quindi dire se \tilde{f} è sviluppabile in serie di Fourier e, nel caso di risposta affermativa, calcolare la serie di Fourier di \tilde{f} .

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{(x+1)(x-3y^2)}{|y|+3} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dire in quali punti dell'asse \vec{x} essa ammette derivate parziali, giustificando la risposta.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x|x-y| + e^{1-x|x-y|} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo, precisando se si tratta di punti di estremo assoluto.

4) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - ye^{yx^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ avente il punto $x = 0$ come punto di minimo assoluto.

5) Calcolare l'integrale triplo seguente

$$\int \int \int_A \frac{4x^2}{\sqrt{z}} dx dy dz$$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 0 \leq 2 - \sqrt{z} \leq x^2 + y^2 \leq z\}$.

6) Studiare l'esattezza (ed eventualmente trovare le primitive) della forma differenziale lineare

$$\left[\frac{x}{x^2 + 2y^2 - 9} - x \right] dx + \left[\frac{2y}{x^2 + 2y^2 - 9} + y \right] dy$$

nel proprio campo di esistenza.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 05-03-2010

1) Trovare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}$$

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 |y|^\alpha}{x^8 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $(0, 0)$ al variare del parametro reale positivo α .

3) Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo assoluto della restrizione di f all'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 3 = 0\}$, dopo aver provato che E è chiuso e limitato.

4) Data la funzione

$$f(x, y) = e^{2x} \log(e + 2xy) - e^y \log(e - 2xy) - 2 \sin x$$

determinarne il campo di esistenza E e dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y = y(x)$ definita in un intorno del punto $x = 0$. Quindi calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{\sin(2x)}$$

5) Calcolare l'area dell'insieme piano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \leq 0\}$$

dopo averne provato la misurabilità secondo Lebesgue.

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 05-03-2010

1) Trovare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}$$

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(|x|+|y|) \sin(xy)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente e differenziabile in $(0, 0)$ giustificando le risposte.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinare i punti di estremo assoluto della restrizione di f all'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + y^2 + 2x^2y^2 - 3 = 0\}$, dopo aver provato che E è chiuso e limitato.

4) Data la funzione

$$f(x, y) = (x + y)^3 + e^{x^3+y^3} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ permette di definire un'unica funzione implicita $y = y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avente le seguenti proprietà:

(i) $y(x) + x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $-1 < y(x) + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) y è monotona in \mathbb{R}

(iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty,$

(v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = -1$

(vi) (facoltativo) y ammette asintoti obliqui sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$.

5) Calcolare l'area dell'insieme piano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \leq 0\}$$

dopo averne provato la misurabilità secondo Lebesgue.

6) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 28-06-2010

1) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha + y^\beta}{x^2 + y^4}$$

al variare dei parametri reali positivi α, β e con $x, y > 0$.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

dire se è continua, derivabile parzialmente, differenziabile in $(0, 0)$.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = 1 - x^3 + 12\sqrt{x^2 + y^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo assoluto nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$, giustificando le risposte date.

4) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{x + y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x - y}{x^2 + y^2} dy$$

esteso alla curva di equazione cartesiana $x^4 + y^4 = 1$.

5) Data la funzione

$$f(x, y) = (x - yx, 2xy) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

determinare $f(\mathbb{R}^2)$ e quindi dire se essa è un diffeomorfismo da \mathbb{R}^2 su $f(\mathbb{R}^2)$. In caso di risposta negativa, determinare una sua restrizione ad un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ che sia adesso un diffeomorfismo, giustificando la scelta fatta.

6) Dato il cerchio del piano xy di centro $(1, 0)$ e raggio $r = 1$, calcolare il volume del solido generato dalla sua rotazione attorno all'asse \vec{y} .

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 14-07-2010

1) Calcolare la somma della serie di funzioni seguente

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^{k+2} (k+1)!}$$

giustificando le risposte.

2) Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+3|x|^3) - \operatorname{arctg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

3) Data la funzione

$$f(x, y) = |x - y| (y - x^2 + 1)$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto sia in \mathbb{R}^2 che nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + yx^3 \right] dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

esteso alla curva di equazione cartesiana $x^4 + y^4 = 1$.

5) Calcolare il volume del solido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 100, z - y + 1 \geq 0, y + 4 \geq 0\}.$$

6) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + e^{2x} \cos x \end{cases}$$

oppure, solo per coloro che non avessero i sistemi di equazioni differenziali lineari nel proprio programma, l'equazione

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 09-09-2010

1) Studiare la convergenza semplice ed uniforme della serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n n^4 + 1} \left[\frac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \right]^n$$

2) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2y)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiarne la continuità, l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità nell'origine.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = y e^{x^2}$$

determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, xy \leq 1\}$.

4) Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} dy : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}.$$

5) Calcolare il volume del solido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - z \geq 0, x^2 + 2y^2 - 2z \leq 0, z \leq 1\}.$$

6) Determinare una funzione $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\phi(0) = 0$ in modo che la forma differenziale lineare seguente

$$[2x + \phi(y)] dx + [x(y - \phi(y))] dy$$

risulti esatta in \mathbb{R}^2 . Quindi trovare quella primitiva $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $U(0, 0) = 0$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 30-09-2010

1) Dire in quale insieme $X \subset \mathbb{R}$ converge puntualmente la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(x-1)(1+x)^k$$

C'è convergenza uniforme in $] -1, 0[$? C'è convergenza uniforme in $] -2, -1[$?

2) Dati l'insieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 1\}$ e la funzione $f(x, y, z) = 2x + y + z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ trovare l'insieme $f(A)$.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{|x|^3 + |y|^3}$$

dimostrare che è prolungabile per continuità nell'origine e quindi studiare la differenziabilità del prolungamento nello stesso punto.

4) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy^2 - e^{xy^2}$$

nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio $r = 1$.

5) Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{dx}{1+y^2} - \frac{2xy}{(1+y^2)^2} dy$$

esteso alla curva di equazioni $x(t) = e^{\sin t}$, $y(t) = \frac{2 \cos t}{1 + \cos^2 t}$, con $t \in [0, \pi]$.

6) Calcolare l'integrale

$$\iint_A \frac{x}{y} dx dy$$

essendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x \leq 4y, 1 \leq x^2 y^2 \leq 4\}$.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 03-12-2010

1) Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x^2)x^{2n}$$

determinarne l'insieme E di convergenza puntuale. Dire, poi, se la convergenza in E è anche uniforme, giustificando la risposta.

2) Data la funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \\ \frac{x^2 y + y^2 z + z^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{altrove} \end{cases}$$

studiarne la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità nell'origine.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = 1 - x^3 + 12\sqrt{x^2 + y^2}$$

determinarne i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 3$.

4) Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x, y) = \frac{y}{x}$$

esteso all'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq y, 9(x^2 + y^2) \leq 4\}$$

5) Siano

$$x(t) = 10(t - t^2), \quad y(t) = \sin(2\pi t) \quad t \in [0, 1]$$

equazioni parametriche di un cammino chiuso \mathcal{C} . Dire se \mathcal{C} è semplice e/o regolare, giustificando la risposta. Quindi calcolare l'area della parte di piano racchiusa dal sostegno del cammino \mathcal{C} , usando le Formule di Gauss-Green.

6) Data la forma differenziale seguente

$$\frac{x + qy}{x^2 + y^2} dx + \frac{rx + sy}{x^2 + y^2} dy$$

determinare il valore di ognuno dei parametri $q, r, s \in \mathbb{R}$ in modo che essa sia esatta nel proprio campo di esistenza e quindi trovarne le primitive.

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 11-02-2011

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3 \log\left(1 + \frac{3}{n}\right)}$$

determinandone il raggio di convergenza ed il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza. Trovare, poi, i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie diverge e quelli per cui è indeterminata, giustificando la risposta.

2) Calcolare, se esistono, i limiti seguenti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^3 y} - 1}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 |y|}$$

3) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x, y) = e^{-\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

4) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y)^2 + 4y \leq 0\}$$

e dire se in esso vi sono punti di minima distanza e punti di massima distanza dalla retta di equazione

$$3x - 2y + 4 = 0$$

giustificando la risposta. Eventualmente calcolarli.

5) Dopo aver provato la misurabilità dell'insieme piano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \leq 3x^2 - y^2 \leq 2\}$$

calcolarne la misura.

6) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -x + y + e^{3t} \\ y' = -x + 4y \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

CdL in Fisica

Prova scritta di Analisi Matematica II del giorno 25-02-2011

1) Studiare la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left[e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right]$$

determinandone il raggio di convergenza ed il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.

2) Studiare la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{\sin(x^2+y^2)} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

al variare del parametro reale positivo α .

3) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 3xy + 2y$$

nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

4) Data l'equazione

$$f(x, y) = 2x + y + \operatorname{arctg} y = 0$$

dimostrare che essa permette di definire una sola funzione implicita $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 dotata di asintoti obliqui. Scrivere le equazioni di tali asintoti.

5) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{x}{1 + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

essendo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

6) Dire se la forma differenziale lineare

$$-\frac{x[\sqrt{x^2 + y^2} - 1]}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

è esatta nel proprio campo di esistenza ed, eventualmente, calcolarne le primitive.

CdL in Fisica

**Prova scritta di Analisi Matematica II
del giorno 13-02-2012**

N.B. La prova ha la durata di due ore, nelle quali bisogna risolvere correttamente almeno due esercizi sui tre proposti.

1) Studiare la continuità, la derivabilità direzionale e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = y \sqrt{|y - x^2|} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

2) Determinare i punti di estremo relativo ed assoluto, se ve ne sono, della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{8y - x^2 - y^2}$$

nell'insieme $X \cap A$ dove X è il campo di esistenza di f ed

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 6(y - 4)^2 - x^2 y \leq 0\}$$

3) Dimostrare che la successione di funzioni

$$f_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2 t^2} \in C^0([0, 1]), n \in \mathbb{N}$$

non converge ad alcuna funzione $f \in C^0([0, 1])$ nella metrica Lagrangiana, mentre converge alla funzione identicamente nulla nella metrica integrale.