CAPITOLO I

Spazi vettoriali (o lineari)

In questo primo capitolo approfondiremo lo studio degli spazi vettoriali, già iniziato nei corsi elementari di Algebra Lineare, e quindi non ripeteremo le definizioni, che riterremo già note, di spazio vettoriale (o lineare) su un campo scalare $\mathbb{K}$ (per noi sempre $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$), sottospazio vettoriale, combinazione lineare di un numero finito di elementi, famiglia (finita o infinita) di punti linearmente indipendenti, applicazione lineare, nucleo ed insieme immagine di una applicazione lineare, isomorfismo algebrico. Denoteremo con θ_X l'elemento nullo di uno spazio vettoriale X, oppure solamente con θ se non vi è possibilità di equivoco.

§1.*Basi di Hamel e dimensione.*

Nei corsi elementari di Algebra Lineare viene, solitamente, affrontata l'analisi degli spazi vettoriali, cosiddetti, di dimensione finita, cioé di quegli spazi vettoriali per i quali esiste un numero finito di elementi linearmente indipendenti tali che ogni altro elemento dello spazio possa scriversi in modo unico come combinazione lineare dei suddetti elementi. In questo corso ci occuperemo della struttura degli spazi vettoriali in generale, sia nel caso di dimensione finita che in quello di dimensione non finita (o, come diremo dopo, infinita); in particolare daremo delle caratterizzazioni degli spazi vettoriali di dimensione non finita (e quindi anche di quelli di dimensione finita).
Occorre, innanzitutto, introdurre la importante nozione di Base di Hamel in modo da poter definire la dimensione di uno spazio vettoriale. Supporremo che il lettore conosca gli elementi fondamentali della Teoria degli Insiemi e della Teoria dei Gruppi, come vengono impartite in un corso elementare di Algebra; di particolare importanza saranno, per i nostri fini, le nozioni di relazione d'equivalenza, insieme quoziente, relazione d'ordine, maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo, elemento massimale, elemento minimale, insieme totalmente ordinato o catena, insieme ben ordinato; fondamentali per la nostra trattazione saranno, anche, il Lemma di Zorn (ed i suoi equivalenti, il Teorema di Zermelo e l'Assioma della Scelta), la nozione di cardinalità di un insieme e l'aritmetica dei numeri cardinali, il Teorema di Schröeder-Bernstein.

Iniziamo il nostro studio con la seguente

Definizione 1.1. *Sia X uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}$ un suo sottoinsieme non vuoto con la proprietà che ogni $x \in X$ può essere espresso in modo unico come combinazione lineare, con coefficienti tutti non nulli, di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ viene allora detto Base di Hamel per X.*

Esercizio 1.1. Dimostrare che ogni base di Hamel è un sottoinsieme linearmente indipendente di X, cioé ogni suo sottoinsieme finito è costituito da elementi linearmente indipendenti (ne segue in particolare che l'elemento nullo θ di X non può fare parte di alcuna base di Hamel).■

Proposizione 1.1. *Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di X è base di Hamel se e solo se è un sottoinsieme linearmente indipendente e massimale rispetto all'inclusione*

Dimostrazione. Innanzitutto, proviamo che se $A \subset X$ è un sottoinsieme linearmente indipendente, esiste un sottoinsieme B di X tale che $A \subseteq B$, B è linearmente indipendente e massimale rispetto all'inclusione. A tal fine consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{B_0 : A \subseteq B_0 \subset X, B_0 \quad \text{linearmente indipendente}\}$$

e la ordiniamo con la relazione di inclusione. Ovviamente, $A \in \mathcal{F}$ che quindi è non vuota; sia, adesso, $\mathcal{C}$ una catena in $\mathcal{F}$ e sia $\tilde{B} = \cup_{C \in \mathcal{C}} C$; è facile vedere che $A \subset \tilde{B}$, che $\tilde{B}$ è linearmente indipendente e che $\tilde{B}$ è un maggiorante per $\mathcal{C}$. Applicando il Lemma di Zorn deduciamo facilmente che $\mathcal{F}$ ha un elemento massimale. Abbiamo, così, provato che

ogni sottoinsieme A di X linearmente indipendente è contenuto in un elemento massimale di $\mathcal{F}$.

Utilizzeremo tale fatto per dimostrare la tesi, come segue. Sia $\mathcal{B}$ base di Hamel non massimale e sia $A \supset \mathcal{B}$ linearmente indipendente, con $A \backslash \mathcal{B} \neq \emptyset$ (un tale insieme A esiste per quanto visto sopra); se $y \in A \backslash \mathcal{B}$, esistono $(\lambda_i)_{i=1}^p \subset \mathbb{K}$, $(x_i)_{i=1}^p \subset \mathcal{B}$ tali che $y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$; inoltre, $y \neq \theta$, poiché A è linearmente indipendente; ne viene che θ è combinazione lineare di y e degli x_i, con coefficienti non tutti nulli; questo contraddice la indipendenza lineare di A. Ne viene che $\mathcal{B}$ è massimale. Viceversa, sia $\mathcal{B}$ linearmente indipendente e massimale, ma non sia base di Hamel. Quindi esiste y che non può essere espresso come combinazione lineare di un qualunque numero di elementi di $\mathcal{B}$; allora, l'insieme $A = \mathcal{B} \cup \{y\}$ è linearmente indipendente e contiene in senso stretto $\mathcal{B}$, contro la massimalità di $\mathcal{B}$. La dimostrazione è conclusa.■

Corollario 1.2. *In uno spazio vettoriale X ogni sottoinsieme linearmente indipendente è contenuto in una base di Hamel.*

È chiaro che in ogni spazio vettoriale esiste più di una base di Hamel; è importante notare che le basi di Hamel di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso "numero" di elementi

Teorema 1.3. *Sia X uno spazio vettoriale. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due sue basi di Hamel, esiste una corrispondenza biunivoca $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, cosicché possiamo concludere che tutte le basi di Hamel di X hanno la stessa cardinalità.*

Daremo due diverse dimostrazioni di tale importante risultato.

Prima dimostrazione. Denotiamo con n_A la cardinalità di $\mathcal{A}$ e con n_B quella di $\mathcal{B}$. Supponiamo che $n_A \leq n_B$. Quindi consideriamo i seguenti casi:

1^o **caso:** sia $n_A < +\infty$ e, per assurdo, $n_A < n_B$; possiamo supporre che $n_B \in \mathbb{N}$, altrimenti passiamo ad un sottoinsieme finito di $\mathcal{B}$ avente cardinalità maggiore di n_A. Ogni $y_j \in \mathcal{B}, j = 1, 2, \ldots n_B$, può essere scritto come combinazione lineare di elementi in $\mathcal{A}$ con coefficienti scalari non tutti nulli come segue $y_j = \sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i^j \, x_i, x_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots n_A$. Si ha, per arbitrari $\mu_j, j = 1, 2, \ldots n_B$

$$\sum_{j=1}^{n_B} \mu_j \, y_j = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n_A} \lambda_i^j \, x_i \right) = \sum_{i=1}^{n_A} \left(\sum_{j=1}^{n_B} \lambda_i^j \mu_j \right) x_i \qquad (1.1);$$

consideriamo, adesso il sistema omogeneo di n_A equazioni lineari nelle n_B incognite μ_j seguente

$$\sum_{j=1}^{n_B} \lambda_i^j \mu_j = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots n_A$$

che, come noto, ammette una soluzione non nulla $(\mu_1^*, \ldots \mu_{n_B}^*)$; ne segue, grazie alla (1.1), che

$$\theta = \sum_{j=1}^{n_B} \mu_j^* \, y_j$$

e quindi che gli y_j sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. L'ottenuta contraddizione dimostra la tesi in questo caso.

2^o **caso:** si supponga che $\mathcal{A}$ abbia infiniti elementi. Per definizione, ogni $x \in \mathcal{A}$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare, a coefficienti tutti non nulli, di un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$; si indichi con $F(x)$ tale sottoinsieme di $\mathcal{B}$. Adesso, si denoti con $\mathcal{C}$ l'insieme unione di tutti gli insiemi $F(x), x \in \mathcal{A}$; è ovvio che $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, ma noi proveremo che essi coincidono; sia $z \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$; poichè z è combinazione lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$, esso è combinazione lineare di un numero finito di elementi di $\mathcal{C}$; da ciò e dal fatto che $z \in \mathcal{B}$ discende subito che $\mathcal{B}$ non è linearmente indipendente, contro il fatto che si tratta di una base di Hamel. Quindi $\mathcal{C} = \mathcal{B} \Rightarrow n_B = n_C$. Se adesso consideriamo tante copie $\mathbb{N}_x$ di $\mathbb{N}$ quanti sono gli elementi di $\mathcal{A}$, otteniamo che l'insieme $\cup\{\mathbb{N}_x : x \in \mathcal{A}\}$ ha cardinalità non inferiore a quella di $\mathcal{C}$; quindi

$$n_B = n_C \leq \aleph_0 \, n_A = n_A.$$

Analogamente, si dimostra che $n_A \leq n_B$; dal Teorema di Schröeder-Bernstein deriva allora la tesi.

Seconda dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni ϕ definite in un sottoinsieme $D_\phi \subseteq \mathcal{A}$ con insieme immagine $R_\phi \subseteq \mathcal{B}$ tali che

(i) ϕ è biettiva da D_ϕ su R_ϕ (ne segue che $n_{D_\phi} \leq n_B$, per ogni $\phi \in \mathcal{F}$)

(ii) $R_\phi \cup (\mathcal{A} \setminus D_\phi)$ è linearmente indipendente.

Quindi, si ordini $\mathcal{F}$ ponendo

$$\phi \leq \phi' \overset{def}{\Longleftrightarrow} \phi' \text{ è estensione di } \phi.$$

È facile vedere che $\mathcal{F} \neq \emptyset$ (infatti, se $y_0 \in \mathcal{B}$ esistono solo un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$, diciamo $x_1, \dots x_p$, tali che $y_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, x_i$, per certi $\lambda_i \in \mathbb{K}$, tutti non nulli; definendo $\phi : D_\phi = \{x_1\} \to R_\phi = \{y_0\}$ si ottiene facilmente un elemento di $\mathcal{F}$; la dimostrazione viene lasciata al lettore). Sia, adesso, $\mathcal{P}$ una catena in $\mathcal{F}$; posto $D = \cup_{\phi \in \mathcal{P}} D_\phi$, osserviamo che se $x \in D$, allora tale x si trova nel dominio D_ϕ di certe funzioni ϕ elementi di $\mathcal{P}$, che è una catena, cosicché tali ϕ assumono lo stesso valore nel punto x scelto (infatti, date due qualunque di esse una delle due estende l'altra); possiamo, così, definire una funzione $\phi : D \to \mathcal{B}$ ponendo

$$\phi(x) = \phi_0(x) \;\text{ per ogni } \phi_0 \in \mathcal{P} \text{ tale che } \; x \in D_{\phi_0}.$$

Non è difficile vedere che ϕ verifica le condizioni (i) e (ii) (la dimostrazione viene lasciata al lettore) e quindi che $\phi \in \mathcal{F}$; ne viene che ogni catena in $\mathcal{F}$ ha un maggiorante ed è quindi possibile applicare il Lemma di Zorn, dal quale si deduce che $\mathcal{F}$ ammette un elemento massimale ψ. Dimostreremo, utilizzando l'esistenza di tale ψ, che $n_A \leq n_B$. Se $D_\psi = \mathcal{A}$ l'asserto segue facilmente dalla (i). Supponiamo, allora, che $D_\psi \neq \mathcal{A}$. Se $R_\psi = \mathcal{B}$, si ha che $\mathcal{B} \cup (\mathcal{A} \setminus D_\psi)$ è linearmente indipendente, dalla (ii), e quindi $\mathcal{B} \cup (\mathcal{A} \setminus D_\psi) = \mathcal{B}$, per la massimalità di $\mathcal{B}$; se ne deduce che $\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \setminus D_\psi)$, fatto da cui segue che

$$n_A = n_{A \setminus D_\psi} + n_{D_\psi} \leq n_B + n_B = n_B.$$

Infine, si abbia $R_\psi \neq \mathcal{B}$. Sia, allora, $y_0 \in \mathcal{B} \setminus R_\psi$; esso può non dipendere linearmente da $R_\psi \cup (\mathcal{A} \setminus D_\psi)$ oppure può dipendere linearmente da $R_\psi \cup (\mathcal{A} \setminus D_\psi)$; nel primo caso, scelto $x_0 \in \mathcal{A} \setminus D_\psi$ si può definire

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \in D_\psi \\ & \\ y_0 & x = x_0 \end{cases} : D_\psi \cup \{x_0\} \to R_\psi \cup \{y_0\}$$

ottenendo una facile contraddizione (la dimostrazione viene lasciata al lettore) con la massimalità di ψ. Nel secondo caso, esistono $(y_j)_{j=1}^{p} \in R_\psi$ e $(x_h)_{h=1}^{s} \in \mathcal{A} \setminus D_\psi$, nonché $(\mu_j)_{j=1}^{p}, (\lambda_h)_{h=1}^{s} \in \mathbb{K}$ tali che

$$y_0 = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \, y_j + \sum_{h=1}^{s} \lambda_h \, x_h$$

dove almeno un λ_{h_0} è non nullo, altrimenti y_0 sarebbe un elemento di $\mathcal{B} \setminus R_\psi$ che dipende linearmente da R_ψ, contro il fatto che $\mathcal{B}$ è base di Hamel; definiamo, ancora, una funzione

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \in D_\psi \\ \\ y_0 & x = x_{h_0} \end{cases} : D_\psi \cup \{x_{h_0}\} \to R_\psi \cup \{y_0\}$$

che, come facilmente si vede (la dimostrazione viene lasciata al lettore), verifica (i) e (ii), in questo modo ancora contraddicendo la massimalità di ψ. Se ne deduce che non può aversi $\mathcal{B} \neq R_\psi$. Ne deriva che $n_A \leq n_B$, come annuciato. Analogamente si dimostra che $n_A \geq n_B$ e quindi dal Teorema di Schröeder-Bernstein deriva allora la tesi.■

Alla luce di quanto dimostrato adesso la seguente Definizione ha perfettamente senso

Definizione 1.2._Dato una spazio vettoriale X chiameremo <u>dimensione di X</u>, e la denoteremo con $dim(X)$, la cardinalità di una sua qualunque base di Hamel._

§2.<u>_Inviluppi._</u>

Definizione 2.1._Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Si chiama <u>inviluppo lineare</u> di A, e si denota con $span(A)$, l'intersezione di tutti i sottospazi lineari di X che contengono A._

$span(A)$ è quindi il più piccolo sottospazio lineare di X contenente A.

Esercizio 2.1. Dimostrare che un sottoinsieme $\mathcal{A}$ di uno spazio vettoriale X è una base di Hamel per X se e solo se esso è linearmente indipendente e $span(\mathcal{A}) = X$.■

Esercizio 2.2. Dimostrare che

$$span(A) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_1, ... \lambda_p \in \mathbb{K}, x_1, ... x_p \in A \text{ tali che } z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\}.■$$

Definizione 2.2._Sia X uno spazio vettoriale. Un insieme $B \subseteq X$ viene detto <u>varietà (o sottospazio)affine</u> se esistono $x_0 \in X$ ed un sottospazio vettoriale F di X tali che_

$$B = x_0 + F = \{x_0 + y : y \in F\}.■$$

Una varietà affine è quindi il traslato di un sottospazio vettoriale.

Esercizio 2.3. Dimostrare che un sottoinsieme V di uno spazio vettoriale X è una varietà affine se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in V$ la retta $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \mathbb{K}\}$ giace in V.$\blacksquare$

Esercizio 2.4. Dimostrare che una varietà affine è un sottospazio lineare se e solo se contiene l'origine. Dimostrare che le rette passanti per l'origine sono tutti e solo i sottospazi lineari i cui elementi sono del tipo $\lambda\, x_0, \lambda \in \mathbb{K}$, essendo x_0 un elemento non nullo della retta stessa.$\blacksquare$

Esercizio 2.5. Dimostrare che, se $x_0, y_0 \in X$ ed M, N sono sottospazi vettoriali di X, allora $x_0 + M = y_0 + N \Longleftrightarrow M = N, x_0 - y_0 \in M \cap N$.$\blacksquare$

Esercizio 2.6. Sia $x_0 + M$ una varietà affine. Provare che $x_0 + M = x + M$, per ogni $x \in x_0 + M$. Utilizzare tale fatto per provare che l'intersezione di una famiglia arbitraria di varietà affini è o vuota o una varietà affine.$\blacksquare$

Definizione 2.3._Dato una spazio vettoriale X ed una sua varietà affine, $V = x_0 + M$, chiameremo <u>dimensione di V</u>, e la denoteremo con $dim(V)$, la dimensione di M._

Ogni retta è, allora, una varietà affine di dimensione 1.

Definizione 2.4._Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Si chiama <u>inviluppo affine</u> di A, e si denota con $aff(A)$, l'intersezione di tutte le varietà affini di X che contengono A._

$aff(A)$ è quindi la più piccola varietà affine di X contenente A.

Definizione 2.5._Dato una spazio vettoriale X ed un suo sottoinsieme A chiameremo <u>dimensione di A</u>, e la denoteremo con $dim(A)$, la dimensione di $aff(A)$._

Proposizione 2.1._Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Allora_

$$aff(A) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_1, \ldots \lambda_p \in \mathbb{K} \text{ con } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\,,\, x_1, \ldots x_p \in A \text{ tali che } z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, proviamo che

$$aff(A) = x_0 + span(A - x_0) \qquad \forall x_0 \in A \qquad (2.1).$$

Sia $x \in A$; allora

$$x = x_0 + (x - x_0) \in x_0 + span(A - x_0),$$

cosicché $x_0 + span(A - x_0)$ è una varietà affine contenente A e quindi contenente $aff(A)$. Adesso, sia V una varietà affine contenente A; allora, $x_0 \in V$, per ogni $x_0 \in A$; poichè $V = y_0 + M$, per certi $y_0 \in X$ ed M sottospazio lineare di X, possiamo scrivere che $V = x_0 + M$; quindi

$$z \in A \subseteq V \Longrightarrow z = x_0 + m_z \text{ con } m_z \text{ opportuno in M } \Longrightarrow A - x_0 \subseteq M \Longrightarrow span(A - x_0) \subseteq M;$$

ne discende che $V \supseteq x_0 + span(A - x_0)$ e quindi che la (2.1) è vera. Per acquisire la tesi sarà allora sufficiente far vedere che, detto H l'insieme a secondo membro della tesi, si ha $H = x_0 + span(A - x_0)$ per qualche $x_0 \in A$ (e quindi per tutti). È ovvio che $H \supseteq A$; sia $x_0 \in A$ e consideriamo $span(A - x_0)$. Scelto $y \in H$, esistono $\lambda_1, \dots \lambda_s \in \mathbb{K}$ con $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$ ed $x_1, \dots x_s \in A$ tali che $y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$; si può allora scrivere

$$y = x_0 + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (x_i - x_0) \in x_0 + span(A - x_0);$$

quindi, $H \subseteq x_0 + span(A - x_0)$. D'altra parte, se $z \in x_0 + span(A - x_0)$ si ha $z = x_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i (x_i - x_0)$ per certi $\lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in A, i = 1, 2, \dots q$; quindi $z = (1 - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i)\, x_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i$ da cui

$$z = \sum_{i=0}^{q} \mu_i y_i \text{ dove } \mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \, , \, \mu_i = \lambda_i \, , \, y_0 = x_0 \, , \, y_i = x_i \, , \, i = 0, 1, 2, \dots q.$$

Concludiamo che H è una varietà affine contenente A e deve quindi contenere la più piccola di tali varietà, cioé $aff(A)$. ∎

Definizione 2.6. *Due varietà affini $x_0 + M, y_0 + N$ si dicono parallele se $M \subseteq N$ oppure $N \subseteq M$.*

Definizione 2.7. *Sia X uno spazio vettoriale. Dati due punti $x, y \in X$ si chiama <u>segmento</u> di estremi x ed y l'insieme*

$$[x, y] = \{z : z \in X, z = t\,x + (1 - t)\,y, t \in [0, 1]\}.$$

Un insieme $A \subseteq X$, non vuoto, viene detto <u>convesso</u> se dati due suoi punti arbitrari il segmento che li congiunge è contenuto in A.

Inoltre, useremo le seguenti usuali notazioni

$$[x, y[= [x, y] \setminus \{y\} \, , \,]x, y \ = [x, y] \setminus \{x\} \, , \,]x, y[= [x, y] \setminus \{x, y\}.$$

Esercizio 2.7. Dimostrare che l'intersezione di una qualunque famiglia di insiemi convessi, se non è vuota, è un insieme convesso.∎

Definizione 2.8. *Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Si chiama* inviluppo convesso *di A, e si denota con $co(A)$, l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi di X che contengono A.*

$co(A)$ è quindi il più piccolo insieme convesso di X contenente A.

Proposizione 2.2. *Sia X uno spazio vettoriale. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Allora*

$$co(A) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_1, \dots \lambda_p \in [0,1] \ con \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \, , \, x_1, \dots x_p \in A \ tali \ che \ z = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \right\}$$

Dimostrazione. Chiamiamo H l'insieme a secondo membro nella tesi ed osserviamo subito che $H \supseteq A$; inoltre, è facile vedere che H è convesso; quindi $H \supseteq co(A)$. Sia, adesso, B un convesso contenente A e siano $y_1, \dots y_s \in B, \lambda_1, \dots \lambda_s \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$ ed $s \in \mathbb{N}, s \geq 2$, arbitrario. Si vuole provare che $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \, y_i \in B$; se $s = 2$, tale affermazione è immediata conseguenza della definizione di convessità; supponiamo la tesi vera per h e la dimostriamo per $h+1$; quindi consideriamo $h+1$ elementi $y_1, \dots y_{h+1} \in B$ ed $h+1$ numeri $\lambda_1, \dots \lambda_{h+1} \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i = 1$; si ha $\lambda_{h+1} = 1 - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i$ e quindi, posto $\lambda = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i$, risulta

$$\sum_{i=1}^{h+1} \lambda_i \, y_i = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \, y_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \right) y_{h+1} = \lambda \left(\sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i}{\lambda} \, y_i \right) + (1-\lambda) y_{h+1} \tag{2.2}$$

dalla (2.2) la tesi seguirà facilmente una volta provato che $\sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i}{\lambda} \, y_i \in B$; ma tale relazione è conseguenza immediata dell'ipotesi induttiva, poiché $\sum_{i=1}^{h} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ e $y_i \in B, i = 1, \dots h$. Quanto provato permette di asserire che $B \supseteq H$, poiché $B \supseteq A$. Ciò conclude la dimostrazione.■

Un elemento di X del tipo $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, con $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1]$, si chiama combinazione convessa degli elementi x_i.

Esercizio 2.8. Sia $A \subseteq X$, non vuoto; dimostrare che A è convesso se e solo se $A + x_0$ è convesso, per ogni $x_0 \in X$.■

Esercizio 2.9. Dati due insiemi A, B in uno spazio vettoriale X, provare che $co(A \cup B) = \cup \{ \lambda a + (1-\lambda) b : \lambda \in [0,1], a \in A, b \in B \}$.■

Nel caso degli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ il risultato della Proposizione 2.2 può essere migliorato come segue

Proposizione 2.3. *Sia $X = \mathbb{K}^n$. Allora, per ogni $A \subseteq X$, non vuoto, si ha*

$$co(A) = \left\{ z \in X : \exists \lambda_1, \dots \lambda_{2n+1} \in [0,1] \ con \ \sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i = 1 \, , \, x_1, \dots x_{2n+1} \in A \ tali \ che \ z = \sum_{i=1}^{2n+1} \lambda_i x_i \right\}$$

*Dimostrazione.*Per ogni $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, poniamo

$$L_m = \left\{ z \in X : \exists \lambda_1, \ldots \lambda_m \in [0,1] \text{ con } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\,,\, x_1, \ldots x_m \in A \text{ tali che } z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \right\};$$

è chiaro che $L_m \subseteq L_{m+1}$, per ogni $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$, e che $\cup_{m \in \mathbb{N}, m \geq 1} L_m = co(A)$. Sia $x \in L_m \setminus L_{m-1}$, avendo scelto $m > 2n+1$; allora, esistono $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in]0,1]$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ e $x_1, \ldots x_m \in A$ tali che $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$. Pensando X sempre come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ricordiamo che in esso esistono al più $2n$ elementi linearmente indipendenti; dalla scelta di m segue che preso arbitrariamente x_i fra i precedenti elementi, gli $m-1$ elementi $x_i - x_1, \ldots x_i - x_{i-1}, x_i - x_{i+1}, \ldots x_i - x_m$, devono essere linearmente dipendenti; esistono quindi numeri reali $b_1^i, \ldots b_{i-1}^i, b_{i+1}^i, \ldots b_m^i$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{j \neq i, j=1}^{m} b_j^i (x_i - x_j) = 0.$$

Posto, adesso, $b_i^i = -\sum_{j \neq i, j=1}^{m} b_j^i$ si ha $\sum_{j=1}^{m} b_j^i = 0$ ed anche $\sum_{j=1}^{m} b_j^i x_i = \theta$. Sia, adesso, $k \in \{1, 2, \ldots m\}$ tale che

$$\frac{|b_k^i|}{\lambda_k} = \max \left\{ \frac{|b_j^i|}{\lambda_j}, j = 1, 2, \ldots m \right\}$$

e notiamo che $\frac{|b_k^i|}{\lambda_k} > 0$; poniamo, adesso, $c_j^i = \lambda_j - \frac{b_j^i}{b_k^i} \lambda_k$ per $j = 1, 2, \ldots m$; si noti che $c_k = 0$ e che tutti gli altri c_j sono non negativi (se infatti, uno di essi, c_h, fosse negativo si avrebbe $0 < \lambda_h < \frac{b_h^i}{b_k^i} \lambda_k \leq \left| \frac{b_h^i}{b_k^i} \right| \lambda_k$ da cui $\frac{|b_h^i|}{\lambda_h} > \frac{|b_k^i|}{\lambda_k}$, che è falso); inoltre, come facilmente si prova

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} c_j^i x_i = x;$$

quindi $x \in L_{m-1}$, dal momento che $c_k = 0$. Da ciò si deduce facilmente che $L_m = L_{2n+1}$ per ogni $m > 2n+1$ e quindi la tesi.■

Osservazione 2.1. Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^n$ il precedente risultato vale sostituendo $2n+1$ con $n+1$, come un attento esame della dimostrazione prova.■

Introduciamo, adesso, alcune altre nozioni che utilizzeremo in seguito

Definizione 2.9.*Sia X uno spazio vettoriale. Un insieme $A \subseteq X$, non vuoto, viene detto <u>bilanciato</u> o <u>equilibrato</u> o <u>circolare</u> se $\lambda A \subseteq A$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$. Un insieme $A \subseteq X$, non vuoto, viene detto <u>assolutamente convesso</u> se è convesso e bilanciato.*

È ovvio che un insieme equilibrato deve contenere θ.

Definizione 2.10. *Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si chiama inviluppo circolare di A l'intersezione di tutti gli insiemi circolari contenenti A; esso si denota con $circ(A)$. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si chiama inviluppo assolutamente convesso di A l'intersezione di tutti gli insiemi assolutamente convessi contenenti A; esso si denota con $absco(A)$.*

$circ(A)$ (risp. $absco(A)$) è quindi il più piccolo insieme circolare (risp. assolutamente convesso) contenente l'insieme dato A.

Si hanno i seguenti risultati

Proposizione 2.4. *Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si ha $circ(A) = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1, a \in A\}$.*

Dimostrazione. Detto $H = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1, a \in A\}$, è ovvio che H è circolare e contiene A. Se, poi, $B \supseteq A$ è un insieme circolare, si ha $B \supseteq H$; infatti, se $\lambda a \in H$, allora $a \in$ (A e quindi) B; allora $\lambda a \in B$. ■

Proposizione 2.5. *Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si ha che A è assolutamente convesso se e solo se per ogni $a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ risulta $\alpha a + \beta b \in A$.*

Dimostrazione. Se per ogni $a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ risulta $\alpha a + \beta b \in A$, è ovvio che A è circolare ed anche convesso, cosicché A è assolutamente convesso. Viceversa, sia A assolutamente convesso e siano $a, b \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| + |\beta| \leq 1$; supponendo che $|\alpha|, |\beta| > 0$ (il che non lede la generalità della prova), si ha

$$\alpha a + \beta b = \left[\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}a\right) + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\left(\frac{\beta}{|\beta|}b\right)\right](|\alpha| + |\beta|) \in A$$

poiché $\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}a\right), \left(\frac{\beta}{|\beta|}b\right) \in A$ (A è circolare!), $c = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}a\right) + \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\left(\frac{\beta}{|\beta|}b\right) \in A$ (A è convesso!) e infine $c(|\alpha| + |\beta|) \in A$ (A è circolare!).■

Proposizione 2.6. *Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si ha*

$$absco(A) = \left\{z \in X : \exists \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_p \in \mathbb{K},\ con \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \leq 1, x_1, x_2, ...x_p \in A\ tali\ che\ z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i,\right\}$$

Dimostrazione. Accenneremo, solo, alla dimostrazione, lasciando al lettore il (facile) compito di sviluppare i dettagli. Detto H l'insieme a secondo memebro della tesi, si noti che $H \supseteq A$; è inoltre immediato provare che H è assolutamente convesso, grazie alla caratterizzazione degli insiemi assolutamente convessi provata nella Proposizione 2.5. Infine, se $C \supseteq A$ è assolutamente convesso e $z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in H$, procedendo per induzione su p, si prova che $z \in C$ (il caso $p = 2$ utilizza la Proposizione 2.5); quindi $H \subseteq C$. Allora, a norma di definizione $H = absco(A)$.■

Lasciamo al lettore il compito di acquisire il seguente risultato

Proposizione 2.7.*Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto, si ha $absco(A) = co(circ(A))$.*

Proposizione 2.8.*Sia X uno spazio vettoriale. Se $A \subseteq X$ è non vuoto ed assolutamente convesso, si ha $span(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$*

Dimostrazione. È ovvio che $span(A) \supseteq \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$. Proviamo, adesso, che $\cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$ è un sottospazio lineare (contenente A), fatto da cui seguirà la tesi. Siano $x, y \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$; allora esistono $n_x, n_y \in \mathbb{N}, a_x, a_y \in A$ tali che $x = n_x a_x, y = n_y a_y$; allora

$$x + y = \left[\frac{n_x}{n_x + n_y} a_x + \frac{n_y}{n_x + n_y} a_y\right](n_x + n_y) \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA,$$

poiché $\frac{n_x}{n_x+n_y} a_x + \frac{n_y}{n_x+n_y} a_y \in A$ (A è convesso!). Siano $\lambda \in \mathbb{K}, z = n_z a_z \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$; allora si ha, per $h \in \mathbb{N}, h \geq |\lambda|$

$$\lambda z = h n_z \left(\frac{\lambda}{h} a_z\right) \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\, nA$$

dal momento che $\frac{\lambda}{h} a_z \in A$ (A è circolare!).■

Definizione 2.11.*Sia X uno spazio vettoriale. Un suo sottoinsieme A viene detto simmetrico rispetto a θ se $x \in A \Rightarrow -x \in A$.*

È ovvio che un insieme circolare è simmetrico.

Esercizio 2.10. Provare che in uno spazio vettoriale reale, un insieme convesso e simmetrico è circolare. Vale anche la implicazione contraria ? Cosa accade se X è spazio vettoriale complesso?■

Definizione 2.12.*Sia X uno spazio vettoriale. Un suo sottoinsieme A viene detto assorbente se per ogni $y \in X$ esiste $\lambda_0 \in]0, 1[$ tale che $\lambda y \in A$, per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Un suo sottoinsieme A viene detto radiale in $x \in A$ se per ogni $y \in X, y \neq x$, esiste $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tale che $x + \lambda y \in A$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq |\lambda_0|$.*

Si noti che un insieme radiale in θ è sempre assorbente e che i due concetti coincidono negli spazi vettoriali reali.

Esercizio 2.11. Provare che in $\mathbb{C}$, visto come spazio vettoriale su se stesso, se A è radiale, allora $\theta \in \overset{o}{A}$. Dire, poi, se negli spazi vettoriali complessi, i concetti di insieme radiale in θ e di insieme assorbente coincidono.■

Proposizione 2.9.*Sia X uno spazio vettoriale ed $A \subseteq X$ non vuoto, convesso e radiale in un certo $x \in A$. Se $y \in A$ e $z \in]x, y[$, allora A è radiale in z*

Dimostrazione. Si ha $z = \lambda_z x + (1 - \lambda_z)y$ per un opportuno $\lambda_z \in]0, 1[$. Sia $t \in A, t \neq x$; esiste $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tale che $x + \lambda t \in A, \lambda \in \mathbb{K}$, ogni volta che $|\lambda| \leq |\lambda_0|$. Allora $\lambda_z(x + \lambda t) + (1 - \lambda_z)y \in A$, perché A è convesso; cioé $\lambda_z x + \lambda_z \lambda t + (1 - \lambda_z)y \in A \Leftrightarrow z + \lambda_z \lambda t \in A$. Questo significa che $z + \gamma t \in A$, per ogni $\gamma \in \mathbb{K}, |\gamma| \leq |\lambda_z \lambda|$.■

Definizione 2.13.*Sia X uno spazio vettoriale. Dato $A \subseteq X$, si chiama nucleo radiale di A l'insieme dei punti di A rispetto a cui A è radiale.*

Esercizio 2.12. Provare che il nucleo radiale di A è convesso e che il nucleo radiale del nucleo radiale coincide con il nucleo radiale stesso.■

§3.Sottospazi lineari complementari. Spazio quoziente. Iperpiani.

Iniziamo il paragrafo con una fondamentale definizione

Definizione 3.1.*Siano F, G due sottospazi lineari di uno spazio vettoriale X. Si dirà che F e G sono sottospazi vettoriali complementari algebrici se ogni $z \in X$ si può esprimere in uno ed un sol modo come somma di un elemento di F e di un elemento di G. Diremo, allora, che X è somma diretta algebrica dei sottospazi lineari F e G, e scriveremo $X = F \oplus_a G$*

Esercizio 3.1. Dimostrare che due sottospazi vettoriali F e G di uno spazio vettoriale X sono complementari algebrici se e solo se $F + G = X$, $F \cap G = \{\theta\}$.■

Si ha il seguente importante fatto

Proposizione 3.1.*Sia X uno spazio vettoriale ed F un suo sottospazio lineare. Allora F ammette un sottospazio lineare complementare G*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}_F$ una base di Hamel per F e sia $\mathcal{B}$ una base di Hamel per X contenente $\mathcal{B}_F$. È facile vedere che $G = span(\mathcal{B}_F \setminus \mathcal{B}_F)$ è il sottospazio vettoriale cercato (la dimostrazione viene lasciata al lettore).■

Dalla costruzione effettuata si vede facilmente che ogni sottospazio vettoriale ha più di un complementare algebrico.

Definizione 3.2.*Sia X uno spazio vettoriale somma diretta di due suoi sottospazi lineari F, G; poiché ogni $x \in X$ si può scrivere in modo unico come somma di due elementi $f_x \in F, g_x \in G$ possiamo definire le seguenti applicazioni lineari*

$$P_F(x) = f_x : X \to F, P_G(x) = g_x : X \to G.$$

È ovvio che $P_F \circ P_F = P_F, P_G \circ P_G = P_G$, cioè che P_F, P_G sono idempotenti; applicazioni lineari siffatte vengono chiamate proiezioni. Inoltre, $P_F = Id_X - P_G$.

Esercizio 3.2. Provare che un'applicazione lineare $T : X \to X$ è una proiezione se e solo se, posto $Y = T(X)$, si ha $P_{Y|Y} = Id_Y$.■

Tale proiezioni sono di grande importanza come sarà messo in evidenza nel prosieguo del corso; in particolare si noti che la loro esistenza permette di estendere applicazioni lineari T definite su un sottospazio vettoriale F di uno spazio lineare X a tutto X, semplicemente considerando l'applicazione $T \circ P_F$.

Definizione 3.3.*Siano X uno spazio vettoriale ed M un suo sottospazio lineare. Si definisca una relazione $\mathcal{R}$ in X ponendo*

$$x\,\mathcal{R}\,y \text{ se e solo se } x - y \in M.$$

Essa è una relazione di equivalenza in X (la dimostrazione viene lasciata al lettore);l'insieme quoziente (solitamente denotato con X/M) ed i cui elementi denotiamo con il simbolo $[x]$ oppure $\hat{x}$, è uno spazio vettoriale se si definiscono le operazioni come segue

$$[x] + [y] = [x + y], \alpha[x] = [\alpha x] \qquad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K},$$

che viene detto spazio quoziente.

Vale la seguente importante

Proposizione 3.2.*Siano X uno spazio vettoriale ed M un suo sottospazio lineare. L'insieme V_M delle varietà affini $x + M, x \in X$, è uno spazio vettoriale se si definiscono le operazioni come segue*

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \alpha(x + M) = (\alpha x) + M \qquad x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Tale spazio vettoriale è isomorfo algebricamente allo spazio quoziente X/M mediante l'isomorfismo

$$\hat{x} \leftrightarrow x + M, \qquad \hat{x} \in X/M, x \in \hat{x}.$$

Se, inoltre, N è un sottospazio lineare di X complementare algebrico di M, allora N è isomorfo algebricamente a X/M mediante l'isomorfismo che ad ogni $x \in N$ associa la classe $[x]$; ne deriva che i sottospazi vettoriali complementari di uno stesso sottospazio lineare hanno tutti la stessa dimensione

Dimostrazione. La dimostrazione che V_M è spazio vettoriale è banale e viene pertanto omessa. Dimostriamo, invece, che l'applicazione $\psi : X/M \to V_M$ definita ponendo

$$\psi([x]) = x + M, \qquad [x] \in X/M, x \in [x],$$

è un isomorfismo algebrico. Che ψ conservi le operazioni è conseguenza immediata della definizione di ψ e delle operazioni in X/M ed in V_M. Se, poi, $x' + M = x'' + M$, allora deve aversi $x' - x'' \in M$ (Esercizio 2.5), da cui segue che $\hat{x}' = \hat{x}''$, cosicché ψ è iniettiva; poiché è ovvio che ψ è suriettiva possiamo asserire che ψ è isomorfismo algebrico. Sia, adesso, $X = M \oplus_a N$ e $\phi : N \to X/M$ definita ponendo $\phi(x) = [x]$; è ovvio che $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), x, y \in X$, e che $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x), \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$. Inoltre, se $x', x'' \in N$ con $[x'] = [x'']$, deve aversi $x' - x'' \in M$; ne discende che $x' - x'' \in M \cap N = \{\theta\}$; quindi ϕ è iniettiva. Siano, infine, $[x] \in X/M$ e $x \in [x]$; esistono $m_x \in M, n_x \in N$ tali che $x = m_x + n_x$; è ovvio che $[x] = [n_x]$, cosicché $\phi(n_x) = [x]$. L'acquisita suriettività di ϕ conclude la dimostrazione.■

Osservazione 3.1. L'ultima parte della precedente dimostrazione permette di asserire che se $X = M \oplus_a N$, allora per ogni classe $\hat{x} \in X/M$ l'insieme $\hat{x} \cap N$ è un singoletto; inoltre, l'applicazione da X/M ad N che associa ad ogni $\hat{x} \in X/M$ l'unico elemento di N in essa contenuto è, semplicemente, ϕ^{-1}.■

Definizione 3.4. *Dato uno spazio vettoriale X ed un suo sottospazio lineare F, si chiama codimensione di F, e si denota con $codim(F)$, la dimensione di un suo qualunque sottospazio complementare algebrico. Si chiama iperpiano ogni varietà affine traslata di un sottospazio di codimensione* 1.

I sottospazi di codimensione 1 si possono caratterizzare come segue

Teorema 3.3. *Sia X uno spazio vettoriale ed F un suo sottoinsieme non vuoto e proprio. I seguenti fatti sono equivalenti*

(i) esiste un'applicazione lineare $f : X \to \mathbb{K}$, non identicamente nulla, tale che $ker(f) = F$,

(ii) $codim(F) = 1$,

(iii) F è massimale proprio rispetto all'inclusione.

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Siano $x_0 \in X \setminus F$ e $y \in X$; quindi, si consideri l'elemento $z = y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0$, dove f è come nell'ipotesi (i) (e quindi $f(x_0) \neq 0$. Si vede facilmente che $f(z) = 0$ e quindi $z \in F$. Inoltre, poiché

$$y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0\right) + \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 = z + \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0$$

si ha che

$$X = F + span(\{x_0\}).$$

Inoltre, se $h \in F \cap span(\{x_0\})$ deve aversi $f(h) = 0$; ma $h \in span(\{x_0\})$, implica che esiste $\lambda_h \in \mathbb{K}$ tale che $h = \lambda_h\, x_0$; ne segue che

$$0 = f(h) = f(\lambda_h\, x_0) = \lambda_h\, f(x_0) \Longrightarrow \lambda_h = 0$$

da cui deriva che $F \cap span(\{x_0\})$ è costituito solo dall'elemento nullo; quindi $codim(F) = dim(span(\{x_0\})) = 1$ come richiesto.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sia G un sottospazio lineare di X contenente in senso proprio F. Poiché F ha codimensione 1, esiste $y_0 \in X$ tale che F e $span(\{y_0\})$ sono complementari algebrici; quindi, ogni $z \in G \setminus F$ può essere scritto come segue

$$z = f_z + \lambda_z\, y_0 \text{ per opportuni } f_z \in F,\ \lambda_z \in \mathbb{K}, \lambda_z \neq 0.$$

Ne segue che

$$y_0 = \frac{z - f_z}{\lambda_z} \in G \Longrightarrow G = X.$$

Allora, F è massimale.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Dalla (iii) segue che per ogni $h_0 \in X \setminus F$ risulta $X = span(F + \{\lambda\, h_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}) = F + span(\{\lambda\, h_0 : \lambda \in \mathbb{K}\})$ (se si avesse $span(F + \{\lambda\, h_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}) \neq X$, per qualche $h_0 \in X \setminus F$, verrebbe contraddetta la massimalità di F). Scelto, adesso, un $h_0 \in X \setminus F$, si definisca

$$f(x + \lambda\, h_0) = \lambda \,:\, X \to \mathbb{K};$$

è facile vedere che f e lineare e che $ker(f) = F$.■

Esercizio 3.3. Dimostrare che un sottoinsieme F di uno spazio vettoriale è un iperpiano se e solo se esiste un'applicazione lineare $f : X \to \mathbb{K}$ che sia costante su F se e solo se esistono un'applicazione lineare $f : X \to \mathbb{K}$ ed un $x_0 \in X$ tali che $F = x_0 + ker f$.■

Definizione 3.5. *Se un iperpiano H è determinato da un'applicazione reale $f : X \to \mathbb{R}$, lineare su $\mathbb{R}$ (cioé tale che $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$, per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in X$) esso viene detto iperpiano reale; in questo caso, esisterà $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $H = \{x : x \in X, f(x) = \alpha\}$; i due insiemi (convessi) $\{x : x \in X, f(x) \leq \alpha\}, \{x : x \in X, f(x) \geq \alpha\}$ vengono detti semispazi algebricamente chiusi, mentre i due insiemi $\{x : x \in X, f(x) < \alpha\}, \{x : x \in X, f(x) > \alpha\}$ vengono detti semispazi algebricamente aperti.*

Esercizio 3.4. Sia X uno spazio vettoriale e siano $x_0 \in X$ ed M un sottospazio lineare tali che ogni $x \in X$ possa essere scritto, in modo unico, come somma di un elemento di $\{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e di un elemento M; si dimostri allora che

(i) $X = M \oplus_a span(x_0)$

(ii) M è un iperpiano reale.■

§4.Alcuni ulteriori risultati sulle applicazioni lineari. Spazio duale.

In questo paragrafo dimostreremo alcune ulteriori e fondamentali proprietà delle applicazioni lineari fra spazi vettoriali, iniziando con il seguente

Teorema 4.1. *Siano X, Y, Z tre spazi vettoriali ed $S : X \to Y, T : X \to Z$ applicazioni lineari. Allora, esiste un'applicazione lineare $R : Y \to Z$ tale che $T = R \circ S$ se e solo se $kerT \supseteq kerS$.*

Dimostrazione. È ovvio che se $T = R \circ S$, allora $kerT \supseteq kerS$. Viceversa, si supponga che $kerT \supseteq kerS$. Cerchiamo di definire l'applicazione R della tesi; innanzitutto, sia $y \in ImS$; esiste $x \in X$ tale che $S(x) = y$; allora, poniamo $R'(y) = T(x) : ImS \to Z$. Immediatamente notiamo che R' è ben definito, poiché se $S(x_1) = S(x_2) = y$ deve aversi $x_1 - x_2 \in kerS \subseteq kerT$, da cui segue che $T(x_1) = T(x_2)$. È ovvio che R' è lineare e che $T = R' \circ S$. Per trovare, infine, R come richiesto nella tesi è sufficiente considerare $R = R' \circ P_{ImS}$, come il lettore può facilmente provare.■

Utilizziamo tale risultato per provare il seguente fondamentale fatto, che tornerà molto utile nello studio delle topologie deboli su spazi localmente convessi

Teorema 4.2. *Sia X uno spazio vettoriale e siano $\psi, \phi_1, ...\phi_n : X \to \mathbb{K}$ applicazioni lineari. Condizione necessaria e sufficiente affinché ψ sia combinazione lineare di $\phi_1, ...\phi_n$ è che $ker\psi \supseteq \cap_{i=1}^n ker\phi_i$.*

Dimostrazione. Poiché è ovvio che se ψ è combinazione lineare di $\phi_1, ...\phi_n$, allora $ker\psi \supseteq \cap_{i=1}^n ker\phi_i$, dimostriamo solo la implicazione contraria; forniremo due dimostrazioni, la prima delle quali usa il precedente Teorema 4.1.

Prima dimostrazione. Sia $T : X \to \mathbb{K}^n$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T(x) = (\phi_1(x), ...\phi_n(x)) \qquad x \in X.$$

Poiché $kerT = \cap_{i=1}^n ker\phi_i$, dalla ipotesi segue che $ker\psi \supseteq kerT$; il Teorema 4.1 garantisce allora l'esistenza di $H : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ lineare tale che $\psi = H \circ T$; poiché per ogni H da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}$ esistono $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tali che $H(x_1, ...x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, (x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^n$, si ottiene che

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \qquad x \in X$$

che è la tesi.$\blacksquare$

Seconda dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero n delle applicazioni ϕ_i. Sia $i = 1$; ovviamente possiamo supporre che ϕ_1 non sia identicamente nulla, altrimenti

$$ker\phi_1 = X \Rightarrow ker\psi = X \Rightarrow \psi \text{ è identicamente nulla}$$

ed allora la tesi è vera con $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrario. Sia $x_0 \in X \setminus ker\phi_1$; poiché $ker\phi_1$ ha codimensione 1 (Teorema 3.3) ogni $y \in X$ può essere scritto in modo unico come segue

$$y = z_y + \lambda_y x_0$$

per opportuni $z_y \in ker\phi_1, \lambda_y \in \mathbb{K}$. Ne viene che

$$\psi(y) = \psi(z_y) + \lambda_y \psi(x_0) = \lambda_y \psi(x_0)$$

poiché $ker\phi_1 \subseteq ker\psi$. D'altra parte si ha $\phi_1(y) = \lambda_y \phi_1(x_0)$, da cui discende che $\lambda_y = \frac{\phi_1(y)}{\phi_1(x_0)}$ e quindi

$$\psi(y) = \lambda_y \psi(x_0) = \frac{\phi_1(y)}{\phi_1(x_0)} \psi(x_0) = \frac{\psi(x_0)}{\phi_1(x_0)} \phi_1(y).$$

Supponiamo, adesso, la tesi vera nel caso di $n-1$ applicazioni ϕ_i e la dimostriamo nel caso di n applicazioni. Denotiamo con $\phi_i^*, i = 1, 2, ...n-1, \psi^*$ le restrizioni di $\phi_i, i = 1, 2, ...n-1, \psi$ al sottospazio $ker\phi_n$; si ha

$$(\cap_{i=1}^{n-1} ker\phi_i) \cap ker\phi_n \subseteq ker\psi \cap ker\phi_n \Rightarrow \cap_{i=1}^{n-1} ker\phi_i^* \subseteq ker\psi^*$$

inclusione da cui discende, per l'ipotesi induttiva, che esistono $\alpha_i, i = 1, 2, ...n-1$, tali che

$$\psi^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i^*(x) \qquad \forall x \in ker\phi_n.$$

Adesso si consideri l'applicazione lineare

$$\rho(x) = \psi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i(x) : X \to \mathbb{K}$$

e si noti che $ker\phi_n \subseteq ker\rho$; per quanto visto nel caso $n = 1$ esiste $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tale che $\rho = \alpha_n \phi_n$ su X, cosicché risulta

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x) \qquad \forall x \in X.\blacksquare$$

Esercizio 4.1. Sia X uno spazio vettoriale ed F un suo iperpiano. È noto che esistono $f : X \to \mathbb{K}$ lineare e $\alpha \in \mathbb{K}$ tali che $F = \{x : x \in X, f(x) = \alpha\}$. Si supponga, anche, che esistano $g : X \to \mathbb{K}$ lineare e $\beta \in \mathbb{K}$ tali che $F = \{x : x \in X, g(x) = \beta\}$. Provare che esiste $\gamma \in \mathbb{K}, \gamma \neq 0$, tale che $f = \gamma g, \alpha = \gamma\beta$.■

Altro notevole fatto è contenuto nel seguente

Teorema 4.3. *Siano X, Y spazi vettoriali e $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Allora l'insieme ImT è isomorfo algebricamente a $X/kerT$.*

Dimostrazione. Per ogni $[x] \in X/kerT$ si consideri $x \in [x]$ e quindi si definisca $\phi([x]) = T(x)$; poiché se $x', x'' \in [x]$ risulta $x' - x'' \in kerT$, si ha $T(x') = T(x'')$, la precedente posizione permette di definire una funzione $\phi : X/kerT \to ImT$, che è una applicazione lineare (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Se, poi, $z \in ImT$, esiste $x \in X$ tale che $T(x) = z$, cosicché $\phi([x]) = z$; quindi ϕ è suriettiva. Infine, se $[x'], [x''] \in X/kerT$ e $\phi([x']) = \phi([x''])$, si ha $T(x') = T(x'')$; quindi $x' - x'' \in kerT$, da cui deriva che $[x'] = [x'']$. Quindi, ϕ è iniettiva ed allora è il richiesto isomorfismo algebrico.■

Si noti che, sotto le ipotesi del precedente risultato, se $Q : X \to X/kerT$ è l'applicazione quoziente si ha

$$T = \phi \circ Q : X \to ImT \subseteq Y.$$

Introduciamo, adesso, un altro importante spazio vettoriale

Definizione 4.1. *Sia X uno spazio vettoriale; denotiamo con X' l'insieme della applicazioni lineari da X a $\mathbb{K}$, che diventa spazio vettoriale con le usuali operazioni di somma di due applicazioni lineari e di prodotto di uno scalare per un'applicazione lineare; esso viene detto* <u>spazio duale (o coniugato) algebrico</u> *di X; i suoi elementi vengono anche chiamati funzionali (lineari).*

È chiaro che oltre al duale di uno spazio vettoriale X, altri spazi vettoriali possono essere definiti considerando il duale del duale, il duale del duale del duale, il duale del duale del duale del duale, etc.etc.; essi saranno denotati con X'', X''', X'^{v}, etc.etc. e saranno chiamati duale secondo (o biduale), duale terzo, duale quarto, etc.etc..

Definizione 4.2. *Sia X uno spazio vettoriale. Definiamo una applicazione lineare*

$$J_X : X \to X'' \text{ ponendo } J_X(x)(f) = f(x) \qquad \forall x \in X, f \in X';$$

essa viene detta <u>immersione canonica</u>.

Proposizione 4.3. *Sia X uno spazio vettoriale e sia J_X l'immersione canonica di X nel proprio biduale. Allora J_X è iniettiva. Inoltre, J_X è suriettiva se e solo se X è finito dimensionale.*

Dimostrazione. La iniettività è immediata dalla definizione di J_X. Inoltre, è già noto dai corsi di Algebra Lineare che J_X è suriettiva nel caso in cui $dim(X)$ sia finita. Sia, adesso, X di dimensione infinita; proveremo che J_X non può essere suriettiva dimostrando che la cardinalità di X'' è maggiore di quella di X; è ovviamente sufficiente provare che $dim(X') > dim(X)$. Sia $\mathcal{A} = \{y_i : i \in I\}$ una base di Hamel per X; per ogni $x \in X$ definiamo $f_x^* : span(x) \to \mathbb{K}$ ponendo $f_x^*(\lambda x) = \lambda$ e quindi estendiamo tale applicazione a tutto X ponendo

$$f_x = f_x^* \circ P_{|span(x)} : X \to \mathbb{K}.$$

La famiglia di funzionali così definiti è linearmente indipendente in X'; infatti,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{x_i} = \theta \Rightarrow \lambda_j = \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_{x_i} \right] (x_j) = 0 \qquad \forall j \in 1, 2, ...p.$$

Ne viene così che $dim(X') \geq dim(X)$; per concludere la prova sarà allora sufficiente trovare $f \in X'$ che non è combinazione lineare dei funzionali f_x sopra definiti; si vede facilmente che un tale funzionale può essere definito ponendo, per ogni $x \in X, x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_{i_j}, y_{i_j} \in \mathcal{A}, \lambda_j \in \mathbb{K}$, $f(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore).■

Definizione 4.3. *Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale X ad un altro spazio vettoriale Y. Si chiama* <u>*applicazione duale o trasposta o aggiunta o coniugata*</u> *l'applicazione T' (lineare!) definita in Y' ed a valori in X' ponendo*

$$[T'(y')](x) = y'[T(x)] \qquad \forall y' \in Y', x \in X.$$

Definizione 4.4. *Sia X uno spazio vettoriale e sia M un suo sottospazio. Si chiama* <u>*annichilatore*</u> *di M in X', e si denota con M^0, l'insieme*

$$M^0 = \{f : f \in X', f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

Se N è un sottospazio di X', si chiama <u>*preannichilatore*</u> *di N in X, e si denota con ${}^0N$, l'insieme*

$${}^0N = \{x : x \in X, f'(x) = 0 \quad \forall f' \in N\}.$$

Proposizione 4.4. *Sia X uno spazio vettoriale e siano M un sottospazio lineare di X ed N un sottospazio lineare di X'. Allora M^0 e ${}^0N$ sono sottospazi lineari. Inoltre,*

$$M^0 = \cap_{x \in M} ker J_X(x), {}^0 N = J_X^{-1}(Im J_X \cap N^0).$$

Lemma 4.5. *Siano X spazio vettoriale ed $A \subseteq X$ sottospazio lineare. Allora, $A =^0 (A^0)$.*

Dimostrazione. È facile provare che $A \subseteq^0 (A^0)$, dalla Definizione 4.4. Sia, adesso, $x_0 \notin A$; consideriamo il sottospazio lineare $Y = span(x_0) \oplus A$; è noto che esiste $\tilde{f} : Y \to \mathbb{K}$ tale che $\tilde{f}(x_0) = 1$ e $\ker \tilde{f} = A$; se consideriamo l'estensione $f = \tilde{f} \circ P_{|Y} \in X'$ otteniamo che $f \in A^0$, mentre $f(x_0) = 1$, da cui segue che $x_0 \notin^0 (A^0)$.■

I seguenti fatti saranno molto utili nel seguito

Proposizione 4.6. *Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale X ad un altro spazio vettoriale Y. Allora, si ha*

(i) $kerT' = (ImT)^0$,

(ii) $ImT =^0 (kerT')$,

(iii) $kerT =^0 (ImT')$,

(iv) $ImT' = (kerT)^0$.

Ne segue che T è suriettiva se e solo se T' è iniettiva e che T' è suriettiva se e solo se T è iniettiva.

Dimostrazione. Proviamo la (i). Si ha $y' \in kerT' \Leftrightarrow T'(y') = \theta_{X'} \Leftrightarrow T'(y')(x) = 0$ per ogni $x \in X \Leftrightarrow y'[T(x)] = 0$ per ogni $x \in X \Leftrightarrow y' \in (ImT)^0$, poiché $ImT = \{T(x) : x \in X\}$.

Proviamo la (ii). Da (i) si ha ${}^0(kerT') =^0 [(ImT)^0]$ e dal Lemma 4.5 si ha ${}^0[(ImT)^0] = ImT$, poiché ImT è un sottospazio di X.

Proviamo (iii). Si ha $x \in kerT \Leftrightarrow T(x) = \theta_Y \Leftrightarrow y'[T(x)] = 0$ per ogni $y' \in Y' \Leftrightarrow x[T'(y')] = 0$ per ogni $y' \in Y' \Leftrightarrow x \in^0 (ImT')$ poiché $ImT' = \{T'(y') : y' \in Y'\}$.

Proviamo la (iv). Sia $x\prime \in (kerT)^0$; allora x è applicazione lineare da X a $\mathbb{K}$ tale che $kerx' \supseteq kerT$. Per il Teorema 4.1 esiste $y' : Y \to \mathbb{K}$, lineare, cioé $y' \in Y'$, tale che $x' = y' \circ T$; quindi, $T'(y') = x' \in ImT'$. D'altra parte, se $x' \in ImT'$, esiste $y' \in Y'$ tale che $T'(y') = x'$. Se, allora, $x \in KerT$ si ha $x'(x) = T'(y')(x) = y'[T(x)] = 0$, cosicché $x' \in (kerT)^0$.■

Proposizione 4.7. *Sia X uno spazio vettoriale ed M un suo sottospazio lineare. Allora, M^0 è isomorfo algebricamente a $(X/M)'$ e M' è isomorfo algebricamente a X'/M^0.*

Dimostrazione. Sia $Q : X \to X/M$ l'applicazione quoziente, che è suriettiva; ne viene che $Q' : (X/M)' \to X'$ è iniettiva; quindi $(X/M)'$ è isomorfo algebricamente a ImQ'; d'altra parte, per la (iv) della Proposizione 4.6 si ha $ImQ' = (kerQ)^0 = M^0$, cosicché la prima parte della tesi è provata. Per provare la seconda parte, si osservi che la inclusione $i : M \to X$ è iniettiva, cosicché $i' : X' \to M'$ è suriettiva; allora, la funzione $f : X'/ker\ i' \to M'$ definita da $f(\hat{x}') = i'(x')$ è isomorfismo algebrico (Teorema 4.3); quindi M' è isomorfo algebricamente a $X'/ker\ i'$; per la Proposizione 4.6 (i) si ha $ker\ i' = (Im\ i)^0 = M^0$; anche la seconda parte della tesi è così acquisita.∎

Altro interessante fatto è contenuto nella seguente

Proposizione 4.8. *Sia X uno spazio vettoriale e siano M ed N sottospazi complementari. Allora $X' = M^0 \oplus N^0$.*

Dimostrazione. Per ipotesi risulta $X = M \oplus N$, cosicché ogni $x \in X$ si può scrivere in modo unico come somma di $m_x \in M$ e $n_x \in N$; se allora $x' \in X'$ si ha

$$x'(x) = x'(m_x) + x'(n_x) = (x' \circ P_M)(m_x) + (x' \circ P_N)(n_x)$$

dove $x' \circ P_M \in N^0, x' \circ P_N \in M^0$; quindi $X' = M^0 + N^0$. Inoltre, se $x' \in M^0 \cap N^0$ risulta

$$x'(x) = x'(m_x) + x'(n_x) = 0 \Rightarrow x' = \theta_{X'};$$

quindi $X' = M^0 \oplus N^0$.∎

§5. Insiemi convessi.

In questa sezione approfondiremo lo studio della famiglia dei sottoinsiemi convessi di uno spazio vettoriale; che come si vedrà in seguito essa è di fondamentale importanza per lo sviluppo dell'Analisi Funzionale.

Iniziamo con il seguente

Teorema 5.1 (Teorema dei Tre Punti). *Sia dato uno spazio vettoriale X. Siano $x, y, z \in X$ a due a due distinti. Siano $u \in]x, y[\,, v \in]u, z[\,$. Allora, esiste $w \in]y, z[\,$ tale che $v \in]x, w[\,$.*

Dimostrazione. La tesi è banale se i tre punti sono allineati; quindi li supporremo non allineati. Inoltre, per comodità di calcolo, possiamo supporre che $x = \theta$, senza ledere la generalità. Esiste $\lambda \in]0, 1[$ tale che $u = \lambda y$; inoltre, esiste $\alpha \in]0, 1[$ tale che $v = \alpha z + (1 - \alpha)u$; è facile vedere che il punto cercato è

$$w = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)} z + \frac{\lambda(1 - \alpha)}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)} y.∎$$

Definizione 5.1. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Si chiama nucleo di A, e si denota con $ker(A)$, l'insieme dei punti $a \in A$ tali che per ogni altro $x \in A$ si ha $[a, x] \subseteq A$.*

Teorema 5.2. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Allora $ker(A)$ è convesso*

Dimostrazione. Siano $z_1, z_2 \in ker(A)$ e sia x in A; proveremo che $[u, x] \subseteq A$, per ogni $u \in [z_1, z_2]$. Vi sono due possibili casi:

1^o **caso.** Sia x un punto della retta per z_1, z_2. Poiché $z_1, z_2 \in ker(A)$ i segmenti $[z_1, x]$ e $[z_2, x]$ sono contenuti in A; dal momento che, qualunque sia la posizione di x sulla retta, risulta $[u, x]$ contenuto in almeno uno di essi, si ha $[u, x] \subseteq A$.

2^o **caso.** Sia x fuori dalla retta per z_1, z_2. Se u è come sopra e, poi, $v \in]x, u[$ arbitrario; per il Teorema 1 esiste $w \in]z_2, x[$ tale che $v \in]z, w[$; poiché $[x, z_2] \subseteq A$, anche $w \in A$; quindi, $[z_1, w] \subseteq A$, cosicché $v \in A$.■

Introduciamo, adesso, alcuni concetti fondamentali per lo studio della nozione di convessità negli spazi vettoriali

Definizione 5.2. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Un punto $x \in X$ si dice* <u>*linearmente accessibile*</u> *da A se esiste $a \in A, a \neq x$, tale che $[a, x[\subseteq A$. L'insieme dei punti accessibili da A sarà denotato con $lina(A)$; inoltre, si definisce* <u>*chiusura algebrica*</u> *di A l'unione di A e di $lina(A)$ e si denota con $lin(A)$.*

Definizione 5.3. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Un punto $a \in A$ si dice* <u>*algebricamente interno*</u> *ad A se per ogni $x \in A, x \neq a$, esiste $w \in]a, x[$ tale che $[a, w[\subseteq A$. L'insieme dei punti algebricamente interni ad A sarà denotato con $cor(A)$ e viene detto* <u>*interno algebrico (o cuore)*</u> *di A; se $A = cor(A)$, allora A viene detto algebricamente aperto. Un punto $x \in X$ che non appartiene né a $cor(A)$ né a $cor(X \setminus A)$ viene detto* <u>*punto di frontiera algebrico*</u> *di A e l'insieme di tali punti viene detto* <u>*frontiera algebrica*</u> *di A.*

È ovvio che un insieme A è assorbente (v. Definizione 2.12) se e solo se $\theta \in cor(A)$.

I seguenti risultati permettono di descrivere l'interno algebrico di un insieme convesso

Teorema 5.3. *Sia A un sottoinsieme di X convesso rispetto ad un suo punto p e sia $x \in cor(A)$. Allora $]p, x] \subseteq cor(A)$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $p = \theta$. Sia $u \in]p, x]$; proveremo che $u \in cor(A)$. A tal fine, scegliamo $v \in X$ e quindi consideriamo il punto $x + (v - u)$; esiste $\delta \in]0, 1[$ tale che $x + \gamma(v - u) \in A$ per ogni $\gamma \in [0, \delta]$.

Dimostriamo che esiste un solo punto comune a $]u, v[$ e $]\theta, x + \delta(v - u)[$; occorre quindi dimostrare che esistono α e ϕ, entrambi in $]0, 1[$, tali che

$$\alpha u + (1 - \alpha)v = \phi(x + \delta(v - u));$$

dal momento che $u = \mu x$, per qualche $\mu \in]0, 1[$, i numeri α e ϕ che occorre trovare sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \alpha\mu + \phi(\mu\delta - 1) = 0 \\ \alpha + \phi\delta = 1 \end{cases}$$

che ammette le soluzioni

$$\alpha = 1 - \mu\delta \in]0, 1[\,, \phi = \mu \in]0, 1[\,;$$

ne viene che $w = (1 - \mu\delta)u + \mu\delta v$ e quindi che ad ogni $\lambda \in]0, \mu\delta[$ corrisponde un punto q di $]u, w[$ tale che la retta per θ e q incontra $[x, x + v - u]$ in un punto h di A; segue che $[\theta, h] \subseteq A$ e quindi che $q \in A$.∎

Teorema 5.4. *Sia A convesso in X spazio vettoriale e sia $x \in cor(A)$. Allora, per ogni $p \in A$ si ha $[x, p[\, \in cor(A)$. Inoltre,*

$$cor(A) = \cup\{[x, p[\, : p \in A\}$$

Dimostrazione. La prima parte della tesi discende dal Teorema 5.3. Per provare la uguaglianza insiemistica della seconda parte è, poi, sufficiente far vedere che $cor(A) \subseteq \cup\{[x, p[\, : p \in A\}$, dal momento che la prima parte garantisce che la inclusione contraria è vera. Sia $q \in cor(A)$. Si consideri il punto $2q - x$, che si trova sulla retta per q ed x; poiché $q \in cor(A)$, esiste $\overline{p} \in]q, 2q - x[\, \cap A$; esiste quindi $\gamma \in [0, 1]$ tale che

$$\overline{p} = (1 - \gamma)q + \gamma(2q - x) \Rightarrow q = \frac{\gamma}{1 + \gamma}x + \frac{1}{1 + \gamma}\overline{p}.\blacksquare$$

Teorema 5.5. *Sia A convesso in X spazio vettoriale e sia $x \in cor(A)$. Allora, per ogni $p \in lina(A)$ si ha $[x, p[\, \in cor(A)$.*

Dimostrazione. Supponiamo, per semplicità di calcolo, che $x = \theta \in cor(A)$. Poiché $p \in lina(A)$, esiste $y \in A$ tale che $[y, p[\, \subseteq A$. Preso $-y$, esiste $\delta \in]0, 1[$ tale che $[-\delta y, \theta] \subseteq A$; grazie al Teorema 5.4, la tesi sarà acquisita una volta provato che ogni $z \in [x, p[$ si trova in A. Troviamo $\lambda > 1$ tale che $\lambda z + (1 - \lambda)(-\delta y) \in]p, y[$ cioé determiniamo $\lambda > 1, \alpha \in]0, 1[$ per i quali si ha

$$\lambda z + (1 - \lambda)(-\delta y) = \alpha p + (1 - \alpha)y;$$

ricordando che $z = \gamma p$, con γ opportuno in $]0,1[$, ne viene che λ, α sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \lambda\gamma - \alpha = 0 \\ \\ \alpha + \lambda\delta = 1 + \delta \end{cases}$$

che ammette le soluzioni

$$\alpha = \frac{\gamma(1+\delta)}{\gamma+\delta} \in]0,1[\,, \lambda = \frac{1+\delta}{\gamma+\delta} > 1.$$

La convessità di A implica che $[-\delta y, w] \subseteq A$ da cui deriva che $z \in A$.■

La convessità di un insieme si mantiene passando al suo interno algebrico ed alla sua chiusura algebrica

Teorema 5.6._Sia A un insieme convesso. Allora $cor(A)$ è convesso._

Dimostrazione. Siano $z_1, z_2 \in cor(A), u \in]z_1, z_2[$ ed $x \in X$ arbitrario. Possono verificarsi i seguenti due casi:

1^o **caso.** x si trova sulla retta per z_1, z_2; se $x \in [z_1, z_2]$, allora $[u, x] \subseteq A$, grazie alla convessità di A; se, invece, $x \notin [z_1, z_2]$, allora $[u, x[$ è unione o di $[z_1, u] \subseteq A$ e $[z_1, x[$ oppure di $[z_2, u] \subseteq A$ e $[z_2, x[$; poiché esistono $w_1 \in]z_1, x[$, $w_2 \in]z_2, x[$ tali che $[z_1, w_1], [z_2, w_2] \subseteq A$, si conclude facilmente che o $[u, w_1]$ oppure $[u, w_2]$ sono contenuti in A; in ogni caso, si è trovato $w \in]u, x[$ tale che $[u, w] \subseteq A$.

2^o **caso.** Sia x non sulla retta per z_1, z_2. Esistono $w_1 \in]z_1, x[, w_2 \in]z_2, x[$ tali che $[w_1, z_1] \subseteq A, [w_2, z_2] \subseteq A$. È facile vedere che esiste $w \in]x, u[\cap]w_1, w_2[$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore); ogni $p \in [u, w]$ si può allora scrivere come combinazione convessa di z_1, z_2, w_1, w_2 e deve quindi trovarsi in A.

Ne segue che $u \in cor(A)$.■

Teorema 5.7._Sia A un insieme convesso. Allora $lin(A)$ è convesso._

Dimostrazione. Siano $z_1, z_2 \in lin(A)$; possono verificarsi i seguenti tre casi:

1^o **caso.** $z_1, z_2 \in A$; la tesi segue dalla convessità di A.

2^o **caso.** $z_1 \in A, z_2 \in lina(A) \setminus A$. Esiste $x \in A$ tale che $[x, z_2[\subseteq A$; vi sono, ora, due possibilità: la prima è che x si trovi sulla retta per z_1 e z_2 (precisamente sulla semiretta avente z_2 come origine e passante per z_1); dal momento che $[x, z_2[\cup [x, z_1] \subseteq A$ facilmente si ricava che $[z_1, z_2[\subseteq A$, qualunque sia la posizione di x sulla suddetta semiretta, da cui la tesi. Se, invece, x non appartiene alla retta per z_1, z_2, per ogni $v \in]x, u[$ esiste $w \in]x, z_2[$ tale che $v \in]w, z_1[$; ma $]z_2, x] \subseteq A$ e quindi $w \in A$; la convessità di A implica che $[z, w] \subseteq A$ e quindi che $v \in A$, cosicché $[u, x[\subseteq A$.

3^o **caso.** $z_1, z_2 \in lina(A) \setminus A$. Allora esistono $p_1, p_2 \in A$ tali che $]z_1, p_1],]z_2, p_2] \subseteq A$. Siano $\alpha \in]0,1[$ e $u = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2$; si consideri $w = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2$ ed il generico elemento $h = \gamma u + (1-\gamma) w \in [u, w]$. Si ha

$$h = \gamma(\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2) + (1-\gamma)(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2) = \alpha(\gamma z_1 + (1-\gamma)p_1) + (1-\alpha)(\gamma z_2 + (1-\gamma)p_2) \in A$$

visto che A è convesso e quindi $\gamma z_1 + (1-\gamma)p_1, \gamma z_2 + (1-\gamma)p_2 \in A$.■

Introduciamo, adesso, il fondamentale concetto di insiemi convessi complementari mettendone in luce alcune utili proprietà

Definizione 5.5. *Dato uno spazio vettoriale X due suoi sottoinsiemi C, D non vuoti si diranno complementari se $C \cup D = X$ e $C \cap D = \emptyset$.*

Insiemi convessi complementari esistono in ogni spazio vettoriale

Teorema 5.8. *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti in X spazio vettoriale. Allora, esistono C, D convessi complementari con $A \subseteq C, B \subseteq D$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P} = \{(Y, Z), Y, Z \subset X,$ convessi, disgiunti $Y \supseteq A, Z \supseteq B\}$. È chiaro che $(A, B) \in \mathcal{P}$. Ordiniamo $\mathcal{P}$ ponendo

$$(Y_1, Z_1) \leq (Y_2, Z_2) \Leftrightarrow Y_1 \subseteq Y_2, Z_1 \subseteq Z_2$$

come facilmente si prova. Se $\mathcal{C} = \{(Y_i, Z_i) : i \in I\}$ è una catena, allora $(\cup_{i\in I} Y_i, \cup_{i\in I} Z_i)$ è un maggiorante per la catena (la dimostrazione viene lasciata al lettore); quindi, dal Lemma di Zorn si deduce l'esistenza di un elemento (C, D) massimale. Per assurdo esista $p \in X \setminus (C \cup D)$; le coppie $(C, co(D \cup \{p\})), (co(C \cup \{p\}), D)$ non possono trovarsi in $\mathcal{P}$, per la massimalità di (C, D); quindi esse sono costituite da coppie di insiemi non disgiunti: esistono $d_1 \in D \cap co(C \cup \{p\}), c_1 \in C \cap co(D \cup \{p\})$; dall'Esercizio 2.9 segue che esistono $c \in C, d \in D$ tali che $d_1 \in]c, p[$, $c_1 \in]d, p[$, cioé che esistono $\lambda, \mu \in]0, 1[$ tali che $d_1 = \lambda c + (1-\lambda)p, c_1 = \mu d + (1-\mu)p$. Cerchiamo adesso due numeri $\alpha, \beta \in]0, 1[$ per i quali si abbia

$$\alpha d_1 + (1-\alpha)d = \beta c_1 + (1-\beta)c;$$

sarà sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta = 1 \\ \alpha(1-\lambda) + \beta(\mu - 1) = 0 \\ \alpha + \beta\mu = 1 \end{cases}$$

che ammette le soluzioni

$$\alpha = \frac{1-\mu}{1-\lambda\mu} \in]0, 1[\, , \beta = \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu} \in]0, 1[\, .$$

Questo significa che l'insieme $[c, c_1] \cap [d, d_1]$ non è vuoto, cosicché anche l'insieme $C \cap D$ dovrebbe esserlo, contro l'ipotesi.$\blacksquare$

Teorema 5.9. *Sia X uno spazio vettoriale e siano C, D due insiemi convessi complementari. Allora*

$$lin(C) = X \setminus cor(D)\,,\; cor(C) = X \setminus lin(D).$$

Dimostrazione. È ovvio che è sufficiente provare la prima uguaglianza. Sia $x \in X \setminus cor(D)$; quindi $x \in X, x \notin cor(D)$. Se $x \notin D$, allora $x \in C \subseteq lin(C)$; se, invece, $x \in D$, dal momento che $x \notin cor(D)$ esiste $y \in X$ tale che $[y, x] \cap D = \{x\}$; ne segue che $[y, x[\subseteq C$, cioé che $x \in lina(C)$. Sia, adesso, $x \in lin(C)$; se $x \in C$, allora $x \notin D \supseteq cor(D)$ e quindi $x \in X \setminus cor(D)$. Se, invece, $x \notin C$, allora $x \in lina(C)$; esiste $p \in C$ tale che $[p, x[\subseteq C$, mentre $x \in D$; ne viene che $x \notin cor(D)$; si deduce che $x \in X \setminus cor(D)$.$\blacksquare$

Esercizio 5.1. Dimostrare che un sottoinsieme V di uno spazio vettoriale è una varietà lineare se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in V$ la retta per x e y giace in V.$\blacksquare$

Teorema 5.10. *Siano C, D convessi complementari in X spazio vettoriale e sia $V = lin(C) \cap lin(D)$. Allora, o $V = X$ oppure V è un iperpiano.*

Dimostrazione. È ovvio che V è convesso (Teorema 5.7). Supponiamo che $V \neq X$; siano $x, y \in V, x \neq y$; sarà provato che la retta per x e y giace in V, cosicché V risulta una varietà lineare (Esercizio 5.1). Sia z un punto di tale retta, con $y \in]z, x[$, tanto per fissare le idee, ma con $z \notin V$; ne viene che $z \in cor(C) \cup cor(D)$, per il Teorema 5.9. Supponendo $z \in cor(C)$, si vuole provare che $x \in lina(C)$; a tal fine si noti che $x \in lin(C)$; se, allora, $x \in lina(C)$, non vi è nulla da provare, mentre se $x \in C$, segue che $[z, x] \subseteq cor(C)$ (Teorema 5.4) e quindi che $y \in cor(C)$, mentre $y \in lin(D)$. La contraddizione ottenuta mostra che deve essere $z \in V$, in questo caso. In modo analogo si può procedere se $x \in]z, y[$. Infine, se $z \in]x, y[$ non vi è nulla da provare, poichè la è sufficiente invocare la convessità di V. Possiamo supporre, per traslazione, che V sia sottospazio. Sia, adesso, $p \in X \setminus V = cor(C) \cup cor(D)$; si supponga $p \in cor(C)$, tanto per fissare le idee. Si osservi, ancora, che $-p \in cor(C) \cup cor(D)$, poiché se così non fosse, avremmo $-p \in V$; quindi V conterrebbe la retta per $-p$ e θ ed anche p, fatto non vero. Inoltre, se $-p \in cor(C)$, dal Teorema 5.7 seguirebbe che $[p, -p] \subset cor(C)$, da cui $\theta \in cor(C)$, mentre $\theta \in V$; ne discende che $-p \in cor(D)$, necessariamente. Adesso, si noti che per ogni $x \in C$ il segmento $[-p, x]$ deve incontrare V; infatti, esiste senz'altro $\delta \in]0, 1[$ tale che $\lambda x + (1 - \lambda)(-p) \in D$ per $0 < \lambda < \delta$; se t_0 denota l'estremo superiore dell'insieme dei $\delta \in]0, 1[$ per i quali accade quanto sopra visto, posto $y_0 = t_0 x + (1 - t_0)(-p)$, si ha $[-p, y_0[\subseteq D$. Si noti adesso che $]y_0, x]$ non contiene elementi di D, poiché se esistesse $z \in D \cap]y_0, x]$, la convessità di D implicherebbe che $[-p, z] \subseteq D$ e quindi verrebbe contraddetta la massimalità di t_0; ne discende che $]y_0, x] \subseteq C$ e quindi che $y_0 \in lina(C) \cap lina(D) \Rightarrow y_0 \in V$. Analogamente si prova che se $x \in D$ il segmento $[p, x]$ deve incontrare V. È allora facile vedere che $X = V \oplus_a span(p)$, cioé che V è iperpiano.■

Osservazione 5.1. Dalla parte finale della precedente dimostrazione si deduce che ogni $x \in X$ può essere scritto, in modo unico, come somma di un elemento in V e di un elemento del tipo $\lambda p, p \in \mathbb{R}$; allora, V è un iperpiano reale (Esercizio 3.4).■

§6.Punti intrinsecamente algebricamente interni. Simplessi.

In questo paragrafo introdurremo una nozione che estende quella di punto algebricamente interno, utilizzandola per studiare alcuni importanti insiemi detti simplessi n-dimensionali. La stessa nozione sarà adoperata per caratterizzare gli spazi vettoriali di dimensione infinita; essa avrà anche altre fondamentali applicazioni che saranno incontrate nei prossimi paragrafi.

Definizione 6.1.*Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Un punto $a \in A$ si dice intrinsecamente algebricamente interno ad A se per ogni $x \in aff(A), x \neq a$, esiste $w \in]a, x[$ tale che $[a, w[\subseteq A$. L'insieme dei punti intrinsecamente algebricamente interni ad A sarà denotato con $icr(A)$ e viene detto interno algebrico (o cuore) intrinseco di A.*

Esercizio 6.1. Dimostrare che $cor(A) \subseteq icr(A)$ e che può accadere che $cor(A) = \emptyset$, mentre $icr(A) \neq \emptyset$.■

Definizione 6.2.*Sia X uno spazio vettoriale e siano dati n+1 punti $x_0, x_1, ...x_n \in X$. Diremo che tali punti sono affinemente indipendenti (in posizione generale) se i punti $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0$ sono linearmente indipendenti; in questo caso chiameremo simplesso n-dimensionale l'insieme $co(\{x_0, x_1, ...x_n\})$, nel quale i punti $x_0, x_1, ...x_n$ vengono detti vertici. Ogni punto del simplesso è allora esprimibile, in modo unico, come combinazione convessa dei punti $x_0, x_1, ...x_n$; i coefficienti di tale combinazione convessa vengono detti coordinate baricentriche del punto.*

Teorema 6.1.*Sia A un n-simplesso. Allora $icr(A)$ consiste di tutti e solo i punti aventi coordinate baricentriche positive. Ne segue che $icr(A) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \in A$ la rappresentazione di a come combinazione convessa di $x_0, x_1, ...x_n$, con gli α_i tutti positivi. Sia, poi, $b \in aff(A), b \neq a$; allora $b = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y_i, y_i \in A, i = 0, 1, ...p$, con α_i scalari tali che $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$; ne segue che esistono scalari $\beta_i, i = 0, 1, ...n$, tali che $b = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i, \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1$. Sia $\lambda \in [0, 1]$; si ha

$$\lambda b + (1 - \lambda)a = \sum_{i=0}^{n} (\lambda\beta_i + (1 - \lambda)\alpha_i)x_i \text{ con } \sum_{i=0}^{n} (\lambda\beta_i + (1 - \lambda)\alpha_i) = 1;$$

per λ sufficientemente piccolo si ha $\lambda\beta_i + (1 - \lambda)\alpha_i > 0$, cosicché $\lambda b + (1 - \lambda)a \in A$, da cui segue che $a \in icr(A)$. Viceversa, sia $a = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \in icr(A)$ e supponiamo, per assurdo, che $\alpha_k = 0$. Si consideri la retta $\{x_k + \lambda(a - x_k) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ e si supponga che esista $\lambda^* > 1$ tale che $x_k + \lambda^*(a - x_k) \in A$; ne viene che, per opportuni $\beta_i \in [0, 1], i = 0, 1, ...n, \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1$, risulta

$$x_k + \lambda^*(a - x_k) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i \Rightarrow a = \frac{1}{\lambda^*} \left[\sum_{i=0, i\neq k}^{n} \beta_i x_i + (\beta_k + \lambda^* - 1)x_k \right]$$

con $\beta_k + \lambda^* - 1 > 0$, contro l'assunzione $\alpha_k = 0$; ne viene che $x_k + \lambda(a - x_k) \notin A$, se $\lambda > 1$. Ma se $a \in icr(A)$, dal momento che $x_k + 2(a - x_k) \in aff(A)$, esiste $\lambda_0 \in]1, 2[$ tale che $[a, x_k + \lambda(a - x_k)] \subseteq A$, per ogni $\lambda \in [1, \lambda_0[$. La contraddizione ottenuta dimostra che deve aversi sempre $\alpha_i > 0$.■

Teorema 6.2. *Sia X uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia A un suo sottoinsieme convesso, non vuoto. Allora, $cor(A) \neq \emptyset$ se e solo se $aff(A) = X$.*

Dimostrazione. Supponiamo, dapprima, che $aff(A) = X$; allora, $aff(A) = cor(A)$. Se $dim(X) = n$, anche $span(A - x_0)$ ha dimensione n, qualunque sia $x_0 \in A$; ne viene che esistono $x_1, x_2, ...x_n \in A$ tali che $x_1 - x_0, x_2 - x_0, ...x_n - x_0$ sono linearmente indipendenti; quindi A contiene il simplesso n-dimensionale B di vertici $x_0, x_1, ...x_n$ ed allora $cor(A) \supseteq icr(B) \neq \emptyset$, per il Teorema 6.1. Viceversa, sia $p \in cor(A)$ e sia $x \in X$; è facile vedere che esiste $\epsilon > 0$ tale che $[p, p + \epsilon(x - p)] \subseteq A$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore); se, allora, $\lambda = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$, risulta $x = \lambda p + (1 - \lambda)(p + \epsilon(x - p)) \in aff(A)$; quindi $aff(A) = X$.■

La seguente definizione permetterà di caratterizzare gli spazi vettoriali di dimensione infinita.

Definizione 6.3. *Dato X spazio vettoriale ed A suo sottoinsieme non vuoto, diremo che A è <u>onnipresente</u> (o <u>algebricamente denso</u>) in X se accade che $lin(A) = X$.*

Dimostriamo adesso l'annunciata caratterizzazione degli spazi vettoriali di dimensione infinita.

Teorema 6.3. *Sia X uno spazio vettoriale. Allora, X ha dimensione infinita se e solo se esiste un suo sottoinsieme proprio A non vuoto, convesso ed onnipresente.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia un sottoinsieme proprio non vuoto, convesso ed onnipresente di X, ma che X abbia dimensione finita. Sia H_0 una varietà affine di X contenente A; preso $z \in lina(A)$, esiste $a \in A, a \neq z$, tale che $[a, z[\subseteq A \subseteq H_0$; ne viene che tutta la retta per a e z deve giacere in H_0; ne viene che $X = lin(A) \subseteq H_0 \Rightarrow H_0 = X$; in particolare $aff(A) = X$. Il Teorema 6.2 permette di asserire che $cor(A) \neq \emptyset$. Possiamo sempre supporre che $\theta \in cor(A)$. Sia, ora, $x \in X$ arbitrario; considerato l'elemento $2x$, dall'uguaglianza $X = lin(A)$ si deduce facilmente che esiste $y \in A$ tale che $[y, 2x[\subseteq A$. D'altra parte, $\theta \in cor(A)$ implica che esiste $t > 0$ tale che $[\theta, t(2x - y)] \subseteq A$; è allora facile vedere che $\{\lambda x + (1 - \lambda)t(2x - y) : \lambda \geq 0\} \cap [y, 2x[\neq \emptyset$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore); da ciò discende che x è combinazione convessa di due punti di A e deve quindi trovarsi in A, che quindi coincide con X, contro il fatto che A è un sottoinsieme proprio di X. Allora, X deve necessariamente avere dimensione infinita. Viceversa, sia X uno spazio di dimensione infinita e sia $\mathcal{B}$ una sua base di Hamel. Per il Teorema di Zermelo essa può essere ben ordinata e tale buon ordinamento può essere scelto in modo che non esista un elemento massimo (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Per ogni $x \in X$ esiste un sottoinsieme finito $F(x)$ di $\mathcal{B}$ tale che x è combinazione lineare $\sum_{y \in F(x)} \alpha_x^y y$ degli elementi $y \in F(x)$; notiamo che esiste $\max F(x)$, dal momento che $\mathcal{B}$ è totalmente ordinato e che ogni $F(x)$ ha un numero finito di elementi; consideriamo quindi il seguente insieme

$$A = \{x : x \in X, \alpha_x^{\max F(x)} > 0\}.$$

È facile vedere che A è proprio e convesso. Proviamo, infine, che A è onnipresente; sia $x \in X$ e sia $F(x)$ il corrispondente sottoinsieme di $\mathcal{B}$ tale che x è combinazione lineare degli elementi in $F(x)$; scelto, poi, $z \in \mathcal{B}$ tale che $z > \max F(x)$ (un tale elemento esiste sempre perché $\mathcal{B}$ non ha massimo!) si ha che $x + tz \in A$, per ogni $t > 0$; da cio si deduce che $x \in lina(A)$ e quindi la tesi.■

N.B. Nei successivi paragrafi $\S 7, \S 8, \S 9$ supporremo che X sia uno spazio vettoriale reale.

§7.*Il Teorema di Separazione.*

Le nozioni introdotte nei paragrafi precedenti ed i risultati ivi dimostrati saranno adesso utilizzati per acquisire il fondamentale Teorema di Separazione di insiemi convessi disgiunti; i risultati che otterremo rispecchiano quanto l'intuizione geometrica basata sul caso di insiemi convessi di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ suggerisce.

Possiamo, adesso, enunciare e dimostrare il fondamentale Teorema di Separazione, dopo aver però introdotto il concetto di insiemi separati

Definizione 7.1. *Dato uno spazio vettoriale X, due suoi sottoinsiemi A, B disgiunti, ed un iperpiano $H = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\} \subset X$, con $\phi : X \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, diremo che H separa i due insiemi se $A \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha\}$ e $B \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \geq \alpha\}$.*

Si ha il seguente

Teorema di Separazione. *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti di uno spazio vettoriale X. Si supponga che o X abbia dimensione finita oppure che $cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$. Allora A e B possono essere separati da un iperpiano.*

Dimostrazione. Siano C, D insiemi convessi complementari, con $C \supseteq A, D \supseteq B$ (Teorema 5.8) e sia $M = lin(C) \cap lin(D)$; dimostreremo che M è un iperpiano. Per assurdo sia $M = X$ (Teorema 5.10). Avremmo, allora, che $X = lin(C) \cap lin(D) \subseteq lin(C), lin(D) \subseteq X \Rightarrow X = lin(C) = lin(D)$; quindi C e D sono onnipresenti ed allora X non può avere dimensione finita (Teorema 6.3). Allora, deve essere $cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$ e quindi $cor(C) \cup cor(D) \neq \emptyset$. Ma si ha (Teorema 5.9)

$$\emptyset = X \setminus M = X \setminus (lin(C) \cap lin(D)) = (X \setminus lin(C)) \cup (X \setminus lin(D)) = cor(D) \cup cor(C)$$

contro quanto osservato prima. Ne segue che, necessariamente, M deve essere iperpiano; esistono allora $\phi \in X', \alpha \in \mathbb{R}$ tali che $M = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\}$. Affermiamo, adesso, che $cor(C) \neq \emptyset$ oppure $cor(D) \neq \emptyset$; infatti, se X è finito dimensionale, allora $cor(C) = X \setminus lin(D) \neq \emptyset$ e $cor(D) = X \setminus lin(C) \neq \emptyset$, poiché non esistono convessi onnipresenti (Teorema 6.3); mentre, sotto l'altra ipotesi, si ha $cor(C) \cup cor(D) \supseteq cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$. Per fissare le idee supponiamo che $cor(C) \neq \emptyset$. È ovvio che $cor(C) \cap D = \emptyset$ e che $M \cap cor(C) = \emptyset$ (Teorema 5.9). Sia $y \in cor(C)$ e supponiamo che $\phi(y) > \alpha$; si proverà che $\phi(z) \geq \alpha$, per ogni $z \in C$. Per assurdo, sia $x \in C$ tale che $\phi(x) < \alpha$; si avrebbe, allora,

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y) = \alpha \text{ per } \lambda = \frac{\alpha - f(y)}{f(x) - f(y)} \in]0, 1[$$

mentre il Teorema 5.4 afferma che, per $\lambda \in [0, 1[$, si ha $\lambda x + (1 - \lambda)y \in cor(C)$. Possiamo concludere che $C \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \geq \alpha\}$. Sia, adesso, u un punto di D per il quale, ancora, si ha $\phi(u) > \alpha$; allora, $\phi(\mu u + (1 - \mu)y) > \alpha$, per ogni $\mu \in [0, 1]$, da cui $[u, y] \cap M = \emptyset$. Poiché $y \in cor(C)$ esiste $\mu_0 \in [0, 1]$ tale che $\mu u + (1 - \mu)y \in C$, per $\mu \in [0, \mu_0[$; sia β_0 l'estremo superiore in $[0, 1]$ di tali μ_0 ed osserviamo che β_0 non può valere 1, poiché in tale caso si avrebbe $u \in lina(C)$; poiché $u \in D \subseteq lin(D)$, ne seguirebbe che $u \in M$, mentre, come già osservato, $[u, y] \cap M = \emptyset$. Quindi, $\beta_0 \in]0, 1[$. Sia $z_0 = \beta_0 u + (1 - \beta_0)y$; per la definizione di β_0 si ha $z_0 \in lina(C)$; se, poi, esistesse $\phi \in]u, z_0[\cap C$, per la convessità di C si avrebbe $[\phi, y] \subseteq C$, fatto che ovviamente contrasta con la definizione di β_0; se ne deduce che $z_0 \in lina(D)$ e quindi che $z_0 \in M$, mentre, come già osservato, $[u, y] \cap M = \emptyset$. Quindi, deve essere $D \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha\}$. La dimostrazione è conclusa.■

Dimostriamo, adesso, il seguente interessante fatto che utilizzeremo spesso nel seguito

Proposizione 7.1. *Sia A un insieme convesso in uno spazio vettoriale X, con $cor(A) \neq \emptyset$. Per ogni $\phi : X \to \mathbb{R}$, lineare, si ha che $\phi(cor(A))$ è aperto in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Osserviamo, intanto, che $\phi(cor(A))$ è convesso in $\mathbb{R}$ ed è quindi un intervallo. Supponiamo, per assurdo, che esista $\alpha = \max \phi(cor(A))$; sia $x_0 \in cor(A)$ tale che $\phi(x_0) = \alpha$ e sia y_0 un altro punto di $cor(A)$. Detta r la retta per x_0 e y_0, sia z_0 un punto della semiretta di origine x_0 contenunta in r e non contenente y_0; poiché $x_0 \in cor(A)$, esiste $w_0 \in]z_0, x_0[$ tale che $[w_0, x_0] \subseteq A$; quindi (Teorema 5.4) $]w_0, x_0] \subseteq cor(A)$; se $h_0 \in]w_0, x_0[$, abbiamo che $x_0 \in [h_0, y_0] \subseteq cor(A)$;esiste quindi $\mu_0 \in]0, 1[$ per il quale si ha

$$x_0 = \mu_0 h_0 + (1 - \mu_0)y_0 \Rightarrow \alpha = \phi(x_0) = \mu_0 \phi(h_0) + (1 - \mu_0)\phi(y_0);$$

poiché $\phi(h_0), \phi(y_0) \leq \alpha$, deve aversi $\phi(y_0) = \alpha$. Quindi, $\phi(A) = \{\alpha\}$, cioé $cor(A)$ è sottoinsieme dell'iperpiano $H = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\}$; ma se $k_0 \notin H$, dovrebbe esistere $\nu_0 \in]0, 1[$ tale che $\nu_0 x_0 + (1 - \nu_0)k_0 \in cor(A) \subseteq H$ (Teorema 5.4); tutta la retta per x_0 e k_0 dovrebbe allora giacere in H; in particolare dovrebbe aversi $k_0 \in H$, fatto non vero. Ne deduciamo che $\phi(cor(A))$ non può avere massimo; poiché analogamente si può provare che $\phi(cor(A))$ non può avere minimo, la dimostrazione può ritenersi conclusa.■

Proposizione 7.2. *Sia A un insieme convesso in uno spazio vettoriale X, con $cor(A) \neq \emptyset$. Allora, risulta $cor(cor(A))) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Infatti, se $x_0 \in cor(A)$ e $y_0 \in X$, esiste $z_0 \in]x_0, y_0[\in A$, cosicché $[x_0, z_0[\subseteq cor(A)$ (Teorema 5.4); quindi, $x_0 \in cor(cor(A)))$.■

Esercizio 7.1. Sia A un insieme convesso in uno spazio vettoriale X (non importa se reale o complesso). Dire quale relazione insiemistica esiste fra $cor(A)$ e $cor(cor(A))$.■

Corollario 7.3. *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti di uno spazio vettoriale X. Si supponga che $cor(A) \neq \emptyset$. Allora A e B possono essere separati da un iperpiano se e solo se $cor(A) \cap B = \emptyset$.*

Dimostrazione. Supponiamo che A, B possano essere separati da un iperpiano $H = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\}$; se $A \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha\}$, allora deve essere $cor(A) \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) < \alpha\}$, per la Proposizione 7.1. Quindi $B \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \geq \alpha\}$ non può incontrare $cor(A)$. Viceversa, supponiamo che $cor(A) \cap B = \emptyset$. Poiché $cor(A)$ è convesso (Teorema 5.6) e $cor(cor(A))) \neq \emptyset$, esiste un iperpiano $H = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\}$ che li separa, con $\phi(cor(A)) \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha\}$ e $B \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \geq \alpha\}$. Se, adesso, $a \in A$, allora $[b, a[\subseteq cor(A)$, per ogni $b \in cor(A)$ (Teorema 4); se ne deduce facilmente che $A \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha\}$. La dimostrazione è conclusa.■

Esistono anche altre nozioni di separazione di insiemi convessi che adesso introdurremo e studieremo in breve

Definizione 7.2. *Dato uno spazio vettoriale X, due suoi sottoinsiemi A, B disgiunti, ed un iperpiano $H = \{x : x \in X, \phi(x) = \alpha\} \subset X$, con $\phi : X \to \mathbb{R}$ lineare ed $\alpha \in \mathbb{R}$, diremo che H separa strettamente i due insiemi se $A \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) < \alpha\}$ e $B \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) > \alpha\}$. Diremo che H separa fortemente i due insiemi se esiste $\epsilon > 0$ tale che $A \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \leq \alpha - \epsilon\}$ e $B \subseteq \{x : x \in X, \phi(x) \geq \alpha + \epsilon\}$.*

È ovvio che la forte separazione implica la stretta separazione che a sua volta implica la separazione.

Esercizio 7.2. Dimostrare, con esempi, che le precedenti implicazioni non possone essere invertite.■

Esercizio 7.3. Dimostrare che A, B, sottoinsiemi di uno spazio vettoriale X, possono essere separati (risp. fortemente separati) se e solo se $A - B$ e $\{\theta\}$ possono essere separati (risp. fortemente separati). Provare con un esempio, che la stessa equivalenza non vale per la stretta separazione; quale delle due implicazioni è vera per la stretta separazione?■

Il seguente risultato è un utile Teorema di Forte Separazione

Teorema 7.4 (Teorema di Forte Separazione). *Sia X uno spazio vettoriale e siano A, B due suoi sottoinsiemi convessi disgiunti. Allora, A e B possono essere separati fortemente se e solo se esiste un insieme V convesso e assorbente tale che $(A + V) \cap B = \emptyset$.*

Dimostrazione. Se esiste un insieme V convesso e assorbente tale che $(A+V) \cap B = \emptyset$, allora $cor(A+V) \neq \emptyset$; infatti, fissato $a \in A$, per ogni $x \in X$ esiste $t_0 > 0$ tale che $t(x - a) \in V$, per ogni $t \in [0, t_0]$; per gli stessi t si ha $a + t(x - a) \in A + V$; allora $A \subseteq cor(A + V)$. Allora, $cor(A + V) \cap B = \emptyset$, cosicché esiste un iperpiano che separa gli insiemi $A + V$ e B, cioé esistono $h : X \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$A + V \subseteq \{x : x \in X, h(x) \geq \alpha\}, B \subseteq \{x : x \in X, h(x) \leq \alpha\}.$$

In particolare, segue che

$$h(a+v-b) \geq 0 \qquad\qquad \forall a \in A, v \in V, b \in B.$$

Si noti, adesso, che $h(V)$ è un intervallo (V è convesso!) aperto contenente 0; esiste quindi $v_0 \in V$ tale che $h(v_0) < 0$; ne discende che $h(a) \geq h(b) - h(v_0)$, per ogni $a \in A, b \in B$, e quindi che $\inf h(A) > \sup h(B)$, da cui la tesi. Viceversa, si supponga che A e B siano fortemente separati; esistono $h : X \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ tali che

$$h(a) \geq \alpha + \epsilon > \alpha - \epsilon \geq h(b) \qquad\qquad \forall a \in A, b \in B;$$

posto, allora, $V = \{x : x \in X, |h(x)| < \epsilon\}$, è facile vedere che V è convesso ed assorbente e che $(A+V) \cap B = \emptyset$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore).■

La seguente interessante conseguenza è relativa alla separazione di opportuni insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$

Corollario 7.5.*Siano A, B due insiemi chiusi, convessi, disgiunti di $\mathbb{R}^n$ ed uno di essi, per fissare le idee A, sia compatto. Allora, A e B possono essere separati fortemente.*

Dimostrazione. È noto che $2\epsilon = d(A, B) > 0$; l'intorno aperto $B(\theta, \epsilon)$ è ovviamente un insieme convesso ed assorbente. Si supponga che esiste $p \in (A + V) \cap B$; esistono quindi $a_p \in A, v_p \in V$ tali che $p = a_p + v_p$. Poiché $p \in B$, risulta

$$2\epsilon = d(A, B) \leq d(a_p, p) = d(a_p, a_p + v_p) = d(\theta, v_p) < \epsilon$$

una palese contraddizione. La prova è conclusa.■

L'ipotesi di compattezza fatta su uno dei due insiemi nel precedente risultato non può essere tolta, come si vede facilmente considerando gli insiemi $A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, xy \geq 1\}$ e $B = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore).

§8.*Il Teorema di Hahn-Banach ed altri Teoremi di Estensione.*

Abbiamo già osservato che è sempre possibile estendere (in modo molto semplice) un funzionale definito su un sottospazio lineare M di uno spazio vettoriale X ad un funzionale definito su tutto X. Tuttavia questo risultato, sufficientemente utile nel caso di spazi vettoriali, perde importanza nel caso in cui lo spazio vettoriale X sia dotato di una opportuna topologia rispetto a cui si vuole che il funzionale in esame e la sua estensione siano continui; la estrema semplicità dell'estensione sopra considerata non permette infatti di garantire la continuità dell'estensione, se non in casi molto particolari. Fortunatamente è possibile ottenere, grazie al Teorema di Separazione, un risultato di estensione molto più sofisticato, che si rivelerà di fondamentale importanza per lo studio degli spazi vettoriali cosiddetti topologici, come vedremo nel prosieguo del nostro studio. Il citato Teorema di Estensione ha anche importanti conseguenze relative alla struttura degli spazi vettoriali ordinati, come sarà messo in luce nello stesso paragrafo.

Il risultato annunciato è il seguente

Teorema di Hahn-Banach. *Siano X uno spazio vettoriale, M un suo sottospazio lineare e $\phi \in M'$. Esista una funzione convessa $g : X \to \mathbb{R}$, che domina ϕ su M, cioé tale che*

$$\phi(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in M.$$

Allora, esiste una estensione $\psi : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X$$

cioé tale che g domina ψ su X.

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio vettoriale $X \times \mathbb{R}$ ed in esso i due insiemi seguenti

$$A = \{(x, y) : (x, y) \in X \times \mathbb{R}, x \in X, y > g(x)\}, B = \{(x, y) : (x, y) \in X \times \mathbb{R}, x \in M, y = \phi(x)\}.$$

È facile vedere che essi sono convessi (B è addirittura un sottospazio lineare) e disgiunti. Inoltre, $cor(A) \neq \emptyset$; infatti, siano $(x_0, y_0) \in A, (x, y) \in X \times \mathbb{R}$; si ha

$$g(\lambda x_0 + (1-\lambda)x) - [\lambda y_0 + (1-\lambda)y] \leq \lambda(g(x_0) - y_0) + (1-\lambda)(g(x) - y) \xrightarrow{\lambda \to 1} g(x_0) - y_0;$$

poiché, dalla definizione di A, $g(x_0) - y_0 < 0$, segue che $(x_0, y_0) \in cor(A)$ (anzi $A = cor(A)$). Esistono così $h \in (X \times \mathbb{R})', \alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$h(a) \geq \alpha \geq h(b) \qquad \forall a \in A, b \in B.$$

Poiché $h(cor(A))$ è un aperto di $\mathbb{R}$, deve aversi

$$h(a) > \alpha \geq h(b) \qquad \forall a \in A, b \in B,$$

mentre $h(B)$ è un sottospazio lineare di $\mathbb{R}$; quindi può solamente accadere che $h(B) = \{0\}$, fatto da cui segue che $h(a) > 0$ in A. Fissato $x \in X$, si ha $h(x, y) > 0$, per $y > \max(g(x), 0)$; ne viene che $h(\theta, 1) = y^{-1}h(\theta, y) > 0$. Possiamo definire un'applicazione lineare

$$\psi(x) = -\frac{h(x, 0)}{h(\theta, 1)} : X \to \mathbb{R} :$$

Innanzitutto, proviamo che ψ estende ϕ; sia, a tal fine, $x \in M$; si ha

$$0 = h(x, \phi(x)) = h(x, 0) + \phi(x)h(\theta, 1) \Rightarrow \psi(x) = \phi(x) \qquad \forall x \in M.$$

Dimostriamo, infine, che g domina ψ su X; a tale scopo, sia $x \in X, y > g(x)$; quindi, $(x, y) \in A$ ed allora

$$0 < h(x, y) = h(x, 0) + yh(\theta, 1) \Rightarrow y > \psi(x) \qquad \forall x \in X \Rightarrow g(x) \geq \psi(x) \qquad \forall x \in X. \blacksquare$$

Per iniziare a mettere in evidenza l'importanza degli ultimi risultati applichiamo il Teorema di Hahn-Banach allo studio di certi spazi vettoriali dotati anche di strutture d'ordine; in effetti dimostreremo che alcuni importanti fatti in tali strutture sono equivalenti ai precedenti Teoremi di Separazione e di Hahn-Banach; in particolare ne seguirà che il Teorema di Separazione ed il Teorema di Hahn-Banach sono equivalenti, cosicché possiamo concludere che essi sono solo due aspetti, uno di natura essenzialmente "geometrica", l'altro di natura essenzialmente "analitica", di uno stesso fenomeno.

Definizione 8.1. *Sia X uno spazio vettoriale e sia P un suo sottoinsieme convesso e chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari; un tale insieme sarà detto <u>cuneo</u>. Definiamo una relazione $'' \geq ''$ in X ponendo*

$$x \geq y \Longleftrightarrow x - y \in P.$$

È facile vedere (la dimostrazione viene lasciata al lettore) che tale relazione è riflessiva e transitiva e che soddisfa le seguenti proprietà

(svo_1) $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$ per ogni $x, y, z \in X$

(svo_2) $x \geq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$ per ogni $x, y \in X, \lambda \geq 0$;

in questo caso $(X, +, \times, \geq)$ (o semplicemente X se non vi è possibilità di equivoco) viene detto <u>spazio vettoriale ordinato (o preordinato)</u>.

Definizione 8.2. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Se $P \cap (-P) = \{\theta\}$, allora P viene detto cono di vertice θ. In questo caso $(X, +, \times, \geq)$ (o semplicemente X se non vi è possibilità di equivoco) viene detto <u>spazio vettoriale parzialmente ordinato</u>*

Le semplici dimostrazioni dei seguenti fatti vengono lasciate al lettore

Proposizione 8.1. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. P è un cono se e solo se la relazione d'ordine $'' \geq ''$ è antisimmetrica.*

Proposizione 8.2. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Allora, $span(P) = P - P$.*

Definizione 8.3. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Se $X = span(P)$, P viene detto riproducente ed X viene detto positivamente generato.*

Proposizione 8.3. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Allora, X è positivamente generato se e solo se*

$$\text{per ogni } x, y \in X \text{ esiste } z \in X \text{ tale che } z \geq x, z \geq y;$$

tale proprietà si chiama proprietà di filtrazione.

Definizione 8.4. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Un elemento $\phi \in X'$ viene detto positivo se e solo se $\phi(x) \geq 0$, per ogni $x \in P$.*

Proposizione 8.4. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. $\phi \in X'$ è positivo se e solo se è monotòno non decrescente.*

Definizione 8.5. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Se si denota con P^+ il sottoinsieme di X' degli elementi positivi, allora è facile vedere che esso è un cuneo in X' (la dimostrazione viene lasciata al lettore); l'ordinamento indotto su X' si chiama ordinamento duale. Il sottospazio lineare $P^+ - P^+$ viene detto duale d'ordine di X.*

Proposizione 8.5. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Allora, P è riproducente se e solo se P^+ è un cono.*

Dimostriamo, adesso, il primo dei risultati equivalenti al Teorema di Separazione ed a quello di Hahn-Banach, cui si faceva riferimento in precedenza

Teorema di Esistenza di Funzionali Positivi non identicamente nulli. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Sia P un sottoinsieme proprio di X e si abbia $cor(P) \neq \emptyset$. Allora P^+ contiene elementi non identicamente nulli.*

Dimostrazione. Sia $x \in X \setminus P$; allora, i due insiemi $\{x\}$ e P possono essere separati da un iperpiano, cioé esistono $h \in X'$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$h(x) \leq \alpha \leq h(p) \qquad \forall p \in P.$$

Se esistesse $p_0 \in P$ tale che $h(p_0) < 0$, essendo P chiuso rispetto alla moltiplicazione per reali positivi, dovrebbe aversi $\inf h(P) = -\infty$, mentre $\alpha \leq h(p)$ per ogni $p \in P$; quindi $0 \leq h(p)$ per ogni $p \in P$; inoltre, $h(cor(P))$ è un insieme aperto, cosicché h non può essere identicamente nullo.■

Il seguente risultato è un Teorema di Estensione di funzionali positivi ed è una conseguenza del Teorema di Hahn-Banach

Teorema di Krein-Rutman. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Sia M un suo sottospazio lineare proprio con $M \cap cor(P) \neq \emptyset$. Sia $\phi \in M'$ tale che $\phi(x) \geq 0$, per ogni $x \in P \cap M$, cioé sia ϕ positivo su M. Allora, esiste una estensione $\psi \in X'$ positiva.*

Dimostrazione. Innanzitutto, dimostriamo che se $x \in X$, allora esiste $y \in M$ tale che $y \geq x$; se, infatti, $p \in cor(P) \cap M, x \in X$ esiste $\lambda \in]0,1[$ tale che $\lambda p + (1-\lambda)x \in P$, cioé $\lambda p + (1-\lambda)x \geq \theta$; ne deriva che $x \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} p \in M$. Fatto ciò ha perfettamente senso definire la seguente funzione

$$g(x) = \inf\{\phi(y) : y \in M, y \geq x\} : X \to \mathbb{R}.$$

È facile provare che g è convessa e che $g(x) = \phi(x)$ su M; possiamo applicare il Teorema di Hahn-Banach ed estendere quindi ϕ ad un funzionale $\psi' \in (span(P \cup M))'$, dominato da g su $span(P \cup M)$. Dimostriamo che $\psi'(x) \geq 0$ se $x \in P$; siano $x \in P, y_0 \in P \cap M$; per $t > 0$ si ha

$$y_0 + tx \in P \Leftrightarrow y_0 + tx \geq \theta \Leftrightarrow \frac{y_0}{t} \geq -x \text{ con } \frac{y_0}{t} \in M;$$

quindi

$$\psi'(-x) \leq g(-x) \leq \psi'\left(\frac{y_0}{t}\right) = \frac{\psi'(y_0)}{t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0 \Rightarrow \psi'(x) \geq 0.$$

Per concludere la dimostrazione è ora sufficiente (come visto già altre volte) considerare $\psi = \psi' \circ P_{span(P \cup M)}$.■

Il Teorema di Krein-Rutman può servire a ridimostrare il Teorema di Esistenza di Funzionali Positivi non identicamente nulli come segue

Teorema di Esistenza di Funzionali Positivi non identicamente nulli. *Sia X uno spazio vettoriale ordinato con cuneo P. Sia P un sottoinsieme proprio di X e si abbia $cor(P) \neq \emptyset$. Allora P^+ contiene elementi non identicamente nulli.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in P$; definiamo $\phi : span(x_0) \to \mathbb{R}$ ponendo $\phi(\lambda x_0) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, ottenendo così un funzionale positivo su $span(x_0)$; il Teorema di Krein-Rutman permette di acquisire la tesi.■

Infine, proviamo, come già annunciato, che dal precedente risultato segue la validità del Teorema di Separazione, cosicché potremo concludere che esso è equivalente al Teorema di Hahn-Banach, al Teorema di Esistenza di Funzionali Positivi non identicamente nulli ed al Teorema di Krein-Rutman

Teorema di Separazione. *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti di uno spazio vettoriale X. Si supponga che o X abbia dimensione finita oppure che $cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$. Allora A e B possono essere separati da un iperpiano.*

Dimostrazione. Come nella precedente dimostrazione del Teorema di Separazione siano C, D insiemi convessi complementari tali che $C \supseteq A, D \supseteq B$, con $cor(C) \neq \emptyset$. È ovviamente sufficiente separare C e D, cioé è sufficiente separare $C - D$ e $\{\theta\}$. Osserviamo che $cor(C - D) \neq \emptyset$; infatti, se $c \in cor(C)$ e $d \in D$, per ogni $x \in X$ si ha

$$\lambda(c - d) + (1 - \lambda)x = \lambda c + (1 - \lambda)(d + x) - d \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

poiché $c \in cor(C)$ esiste $\lambda_0 \in]0, 1[$ tale che $\lambda c + (1 - \lambda)(d + x) \in C$ se $\lambda_0 < \lambda < 1$; quindi, per gli stessi valori di λ si ha $\lambda(c - d) + (1 - \lambda)x \in C - D$. Sia, adesso,

$$W = \{tp : t \in [0, +\infty[\, , p \in C - D\};$$

non è difficile provare che W è un cuneo in X, con $cor(W) \supseteq cor(C - D)$, cosicché X diventa spazio vettoriale ordinato e possiamo applicare il Teorema di Esistenza di Funzionali Positivi non identicamente nulli; se f è un siffatto funzionale si ha $f(p) \geq 0 = f(\theta)$, per ogni $p \in W$. La tesi è acquisita.■

§9. Iperpiani di supporto.

In questa sezione studieremo la nozione di iperpiano di supporto ad un insieme convesso, estendendo noti fatti validi nel caso finito dimensionale al caso di spazi vettoriali di dimensione infinita.

Iniziamo con la seguente

Definizione 9.1. *Sia X uno spazio vettoriale, A un suo sottoinsieme convesso ed H un iperpiano. Diremo che H è un iperpiano di supporto per A se A è contenuto in uno dei due semispazi determinati da H e se $A \cap H \neq \emptyset$. Un punto $x_0 \in A$ è detto punto di supporto per A se esiste un iperpiano di supporto ad A contenente x_0; se H non contiene A, allora x_0 viene detto punto di supporto proprio.*

Il seguente importante risultato è conseguenza del Teorema di Separazione ed è premessa fondamentale per la dimostrazione dell'esistenza di iperpiani di supporto ad insiemi convessi

Teorema 9.1. *Sia X uno spazio vettoriale e sia A un suo sottoinsieme convesso, tale che $icr(A) \neq \emptyset$. Se $x \notin icr(A)$ esiste $\phi \in X'$ tale che $\phi(x) > \phi(y)$, per ogni $y \in icr(A)$.*

Dimostrazione. Poiché $x_0 \in icr(A) \Leftrightarrow \theta \in icr(A - x_0)$, con $A - x_0$ convesso, possiamo supporre, senza ledere la generalità, che $\theta \in icr(A)$; ne segue che $aff(A) = span(A)$. Denotato con M l'inviluppo lineare di A, si supponga che $x \notin M$; quindi si consideri $\tilde{\phi} : span(x) \to \mathbb{R}$ definita ponendo $\phi(\lambda x) = \lambda$ e quindi $\phi = \tilde{\phi} \circ P_M \in X'$; si ha facilmente la tesi, visto che $\phi(x) = 1$, mentre $icr(A) \subseteq M \subseteq ker\phi$. Adesso, si assuma che $x \in M$; se si lavora in M, si ha $icr(A) = cor(A)$; allora, x e $cor(A)$ sono insiemi convessi, disgiunti in M con $cor(cor(A)) \neq \emptyset$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore); esistono allora $\phi' \in M'$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\phi'(x) \geq \alpha \geq \phi'(y) \qquad \forall y \in cor(A).$$

Si ricordi adesso che $\phi'(cor(A))$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ (Proposizione 7.1), cosicché deve essere

$$\phi'(x) \geq \alpha > \phi'(y) \qquad \forall y \in cor(A);$$

la tesi si ottiene considerando la solita estensione $\phi = \phi' \circ P_M \in X'$.■

Il seguente risultato permette di caratterizzare i punti di supporto propri di un insieme convesso

Teorema 9.2. *Sia X uno spazio vettoriale e sia A un suo sottoinsieme convesso, tale che $icr(A) \neq \emptyset$. I punti di supporto propri sono tutti e solo i punti di $A \setminus icr(A)$.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità possiamo supporre $\theta \in A$ ed anche $X = span(A)$ (perché?), cosicché $icr(A) = cor(A)$. Sia x_0 punto di supporto proprio; allora esistono $\phi \in X', \alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\phi(x_0) = \alpha \geq \phi(y) \qquad \forall y \in (cor(A) \text{ e quindi in) } A;$$

se fosse $x_0 \in cor(A)$, si avrebbe $\phi(x_0) = \max\{\phi(z) : z \in cor(A)\}$, mentre $\phi(cor(A))$ è aperto in $\mathbb{R}$; ne segue che $x_0 \notin cor(A)$. Viceversa, sia $x_0 \in A \setminus cor(A)$; esiste allora $\phi \in X'$ tale che $\phi(x_0) > \phi(y)$, per ogni $y \in cor(A)$. Proviamo che da tale disuguaglianza segue che

$$\phi(z) \leq \alpha = \phi(x_0) \qquad \forall z \in A.$$

Per assurdo, si supponga che esiste $z_0 \in A$ con $\phi(z_0) > \alpha$; se $y_0 \in cor(A)$, allora $]z_0, y_0] \subseteq cor(A)$; questo significa che $w = \lambda z_0 + (1 - \lambda) y_0 \in cor(A)$, per ogni $\lambda \in [0, 1[$; ne discende che

$$\phi(w) = \lambda\phi(z_0) + (1 - \lambda)\phi(y_0) > \alpha \text{ per } \lambda \text{ sufficientemente vicino ad } 1,$$

contro il fatto che $\phi(y) \leq \alpha$, per ogni $y \in cor(A)$.■

Le funzioni convesse (la cui definizione riteniamo ben nota al lettore, insieme alla nozione di epigrafico, $epi(f)$) definite su spazi vettoriali dotati di una qualche topologia rivestono grande importanza in Analisi Matematica e nelle applicazioni di essa. In questa parte finale del paragrafo affronteremo brevemente il loro studio, mettendone in evidenza certe proprietà, guidati in questo studio dalla conoscenza di ben noti fatti relativi alle funzioni convesse definite su sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ ed alla loro differenziabilità; in particolare cercheremo di applicare i precedenti risultati di separazione e di estensione di funzionali allo studio di tali funzioni, ottenendo risultati che si dimostreranno essere, ancora una volta, equivalenti ai suddetti Teoremi di Separazione e di Hahn-Banach.

Definizione 9.2. *Siano X uno spazio vettoriale, $A \subseteq X$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Sia, poi, $x_0 \in A$; si dice che $\phi \in X'$ è un <u>sottogradiente</u> per f in x_0 se accade che*

$$\phi(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \qquad\qquad \forall x \in A.$$

Si dice, allora, che f è <u>sottodifferenziabile</u> in x_0; l'insieme dei sottogradienti viene detto <u>sottodifferenziale</u> di f in x_0.

Tale definizione è motivata da quanto accade nel caso di funzioni convesse definite in sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$; invitiamo, allora, il lettore a rivisitare i Teoremi sulla funzioni convesse differenziabili definite in sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ alla luce della precedente definizione.

Come nel caso di funzioni convesse definite in sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^n$ la differenziabilità è suscettibile di una interpretazione geometrica molto interessante ed istruttiva

Proposizione 9.3. *Siano X uno spazio vettoriale, $A \subseteq X$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Sia, poi, $x_0 \in A$. Un funzionale $\phi \in X'$ è un sottogradiente per f in x_0 se e solo se il grafico della funzione*

$$h(x) = f(x_0) + \phi(x - x_0) : X \to \mathbb{R}$$

è iperpiano di supporto per l'epigrafico epi(f) di f.

Dimostrazione. Se $\phi \in X'$, siano

$$\psi(x, y) = y - \phi(x) : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha = f(x_0) - \phi(x_0);$$

ψ è ovviamente lineare ed è facile vedere che $x, y) \in X \times \mathbb{R}$ è un punto dell'iperpiano individuato da ψ ed α se e solo se esso giace sul grafico di h (la dimostrazione viene lasciata al lettore). Supponendo che $\phi \in X'$ sia sottogradiente di f in x_0, si ha facilmente che

$$\alpha \leq \psi(xf(x)) \qquad\qquad \forall x \in A.$$

Se allora $(x, y) \in epi(f)$, discende che $\alpha \leq \psi(x, f(x)) \leq \psi(x, y)$, dal momento che ψ è monotòna non decrescente rispetto alla variabile y; allora, $epi(f) \subseteq \{(x, y) : (x, y) \in X \times \mathbb{R}, \alpha \leq \psi(x, y)\}$; inoltre, $\psi(x_0, f(x_0)) = \alpha$. Quindi il grafico della funzione $h(x)$ è iperpiano di supporto per l'epigrafico epi(f) di f in $(x_0, f(x_0))$. Viceversa, siano $epi(f) \subseteq \{(x, y) : (x, y) \in X \times \mathbb{R}, \alpha \leq \psi(x, y)\}$ e $\psi(x_0, f(x_0)) = \alpha$. Ne viene che $\alpha \leq \psi(x, f(x))$, per ogni $x \in A$; quindi

$$f(x_0) - \phi(x_0) \leq f(x) - \phi(x) \qquad \forall x \in A \Rightarrow \phi(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \qquad \forall x \in A,$$

cosicché ϕ è un sottogradiente per f in x_0.■

Nel risultato successivo determineremo i punti di esistenza del sottogradiente

Teorema 9.4.*Siano X uno spazio vettoriale, $A \subseteq X$ un insieme convesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora, f è sottodifferenziabile in ogni $x_0 \in icr(A)$.*

Dimostrazione. È noto che $x_0 \in icr(A) \Leftrightarrow \theta \in icr(A - x_0)$, dove $B = A - x_0$ è convesso; inoltre, se consideriamo $g(x) = f(x) - f(x_0) : A \to \mathbb{R}$ otteniamo ancora una funzione convessa che assume il valore 0 sull'elemento x_0. Quanto detto implica che possiamo assumere che $\theta \in icr(A)$ e che $f(\theta) = 0$, senza ledere la generalità della dimostrazione. Operiamo in $M = span(A) = aff(A)$, cosicché $icr(A) = cor(A)$. innanzitutto osserviamo che in $M \times \mathbb{R}$ ogni punto del tipo (θ, y_0), con $y_0 > 0$, si trova $cor(epi(f))$; infatti se $(x, y) \in M \times \mathbb{R}$ dire che (θ, y_0), con $y_0 > 0$, si trova $cor(epi(f))$ equivale a dire che esiste $\lambda_0 \in]0, 1[$ tale che

$$(1 - \lambda)(\theta, y_0) + \lambda(x, y) \in epi(f) \Leftrightarrow (1 - \lambda)\theta + \lambda x \in A \ \text{ e } f[(1 - \lambda)\theta + \lambda x] \leq (1 - \lambda)y_0 + \lambda y$$

per ogni $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Cominciamo con il notare che dal fatto che $\theta \in cor(A)$ deriva l'esistenza di $\lambda_1 \in]0, 1[$ per il quale $(1-\lambda)\theta+\lambda x \in A$, ogni volta che $\lambda \in [0, \lambda_1]$; allora la tesi equivale a provare che esiste $\lambda_0 \in]0, \lambda_1]$ tale che

$$f(\lambda x) = f[(1 - \lambda)\theta + \lambda x] \leq (1 - \lambda)y_0 + \lambda y = y_0 + \lambda(y - y_0) \qquad \forall \lambda \in [0, \lambda_0].$$

Posto $g(\lambda) = f(\lambda x) : [0, \lambda_1] \to \mathbb{R}$, si osservi che g è convessa e quindi che esiste il $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = g'_+(0) \in [-\infty, +\infty[$, cosicché $\frac{g(\lambda)}{\lambda}$ è superiormente limitato in un intorno destro di 0; d'altra parte $\frac{y_0}{\lambda} + (y - y_0) \to +\infty$, quando $\lambda \to 0$, di modo che esiste $\lambda_0 \in]0, \lambda_1]$ tale che

$$\frac{g(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{y_0}{\lambda} + (y - y_0) \Leftrightarrow g(\lambda) \leq y_0 + \lambda(y - y_0) \qquad \forall \lambda \in [0, \lambda_0],$$

che era quanto si voleva provare. È, inoltre, facile dimostrare che $(\theta, 0) \notin cor(epi(f))$ (la dimostrazione viene lasciata al lettore), cosicché esiste un iperpiano H di supporto proprio a epi(f) nel punto $(\theta, 0)$, cioé esistono $\psi \in (M \times \mathbb{R})'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\psi(\theta, 0) = \alpha$ (ne segue che $\alpha = 0$), $\psi(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in epi(f)$, mentre $epi(f)$ non è contenuto nell'iperpiano $H = ker\psi$. Notiamo, adesso, che $\psi(\theta, 1) \geq 0$, poiché $(\theta, 1) \in cor(epi(f))$, ma poiché $\psi(cor(epi(f))) \subseteq [0, +\infty[$ è un aperto in $\mathbb{R}$ (Proposizione 7.1) deve aversi $\psi(\theta, 1) > 0$. Di conseguenza si ha

$$0 \leq \psi(x, f(x)) = \psi(x, 0) + f(x)\psi(\theta, 1) \Rightarrow f(x) \geq -\frac{\psi(x, 0)}{\psi(\theta, 1)}$$

per ogni $x \in A$. Allora, posto $\phi(x) = -\frac{\psi(x,0)}{\psi(\theta,1)} : M \to \mathbb{R}$, si è definito un elemento di M' tale che

$$f(x) \geq \phi(x) \qquad \forall x \in A \Rightarrow f(x) - f\theta) \geq \phi(x - \theta) \qquad \forall x \in A.$$

Estendendo ϕ a tutto lo spazio vettoriale X, con la solita composizione con la proiezione canonica di X su M, si definisce, infine, un sottogradiente per f in θ.■

Ancora una volta, il risultato ottenuto non è semplice conseguenza del Teorema di Separazione (attraverso i Teoremi 9.1 e 9.2), ma è ad esso equivalente; infatti

Teorema di Separazione. *Sia X uno spazio vettoriale e siano A, B due suoi sottoinsiemi non vuoti, convessi, disgiunti. Supponiamo che X sia finito dimensionale oppure che $cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$. Allora A, B possono essere separati da un iperpiano.*

Dimostrazione. È noto (Teorema 5.8) che esistono due insiemi convessi complementari C, D tali che $C \supseteq A, D \supseteq B$ e tali che $cor(C) \neq \emptyset$ (oppure $cor(D) \neq \emptyset$); è, allora, ovvio che è sufficiente separare C e D o, equivalentemente, $C - D$ e θ, dove $cor(C - D) \neq \emptyset$; dopo una traslazione potremo supporre che $\theta \in cor(C - D)$, cosicché sarà sufficiente separare $Y = C - D$ da un certo $y_0 \neq \theta$, nell'ipotesi che $\theta \in cor(Y)$. Y è convesso ed assorbente, cosicché per ogni $x \in X$ esiste $t > 0$ tale che $x \in tY$; allora, si può definire la funzione

$$\rho_Y(x) = \inf\{t : t > 0, x \in tY\} \qquad \forall x \in X;$$

ρ_Y viene detto funzionale di Minkowski di Y. Innanzitutto, osserviamo che $\rho_Y(y_0) \geq 1$, poiché $y_0 \notin Y$ e poiché $\theta \in Y$ e la convessità di Y implicano che Y è circolare (si ricordi che X è spazio vettoriale reale).

Proviamo, adesso, che ρ_Y è positivamente omogeneo, cioé che

$$\rho_Y(tx) = t\rho_Y(x) \qquad \forall t > 0, x \in X.$$

A tal fine, sia $\epsilon > 0$; fissato $t > 0$, esiste $t_\epsilon > 0$ tale che $tx \in t_\epsilon Y, \rho_Y(tx) + \epsilon > t_\epsilon$; ne viene che $x \in \frac{t_\epsilon}{t}Y$, da cui $\rho_Y(x) \leq \frac{t_\epsilon}{t}$; quindi $t\rho_Y(x) < \rho_Y(tx) + \epsilon$, da cui segue che $t\rho_Y(x) \leq \rho_Y(tx)$; poiché la disuguaglianza contraria si prova in modo analogo, si deduce la richiesta proprietà. Adesso, dimostriamo che ρ_Y è subadditiva, cioé che

$$\rho_Y(x + y) \leq \rho_Y(x) + \rho_Y(y) \qquad \forall x, y \in Y.$$

A tale scopo sia $\epsilon > 0$; esistono $t_x, t_y > 0$ tali che $\rho_Y(x) < t_x < \rho_Y(x) + \epsilon, \rho_Y(y) < t_y < \rho_Y(y) + \epsilon$ e $x \in t_x Y, y \in t_y Y$; si ha allora

$$\frac{x}{t_x + t_y} \in \frac{t_x}{t_x + t_y}Y, \frac{y}{t_x + t_y} \in \frac{t_y}{t_x + t_y}Y \Rightarrow \frac{x + y}{t_x + t_y} \in \frac{t_x}{t_x + t_y}Y + \frac{t_y}{t_x + t_y}Y \subset Y \Rightarrow x + y \in (t_x + t_y)Y$$

grazie alla convessità di Y; se ne deduce che $\rho_Y(x + y) \leq t_x + t_y < \rho_Y(x) + \rho_Y(y) + 2\epsilon$; l'arbitrarietà di ϵ permette di asserire che $\rho_Y(x + y) \leq \rho_Y(x) + \rho_Y(y)$. Essendo $\rho : X \to \mathbb{R}$ convessa, dal Teorema del Sottogradiente discende che per ogni $y_0 \in X$ esiste $\phi \in X'$ tale che

$$\phi(x - y_0) \leq \rho_Y(x) - \rho_Y(y_0) \qquad \forall x \in X.$$

Si noti adesso che se $x = \theta$ si ha $\phi(y_0) \geq \rho_Y(y_0)$, mentre se $x = 2y_0$ si ottiene la disuguaglianza contraria, cosicché $\phi(y_0) = \rho_Y(y_0)$. Ne viene che $\phi(x) \leq \rho_Y(x)$ in X; se allora $x \in Y$, si ha $\phi(x) \leq \rho_Y(x) \leq 1$; dal momento che $1 \leq \rho_Y(y_0) = \phi(y_0)$, si deduce che l'iperpiano $\{x : x \in X, \phi(x) = 1\}$ separa Y ed y_0, come voluto.$\blacksquare$

§10.*Estensione di alcuni dei precedenti risultati al caso di spazi vettoriali complessi.*

I Teoremi di Separazione e di Hahn-Banach provati in questi ultimi paragrafi sono stati ottenuti solo per spazi vettoriali reali, ma per ognuno di essi esiste anche una versione relativa agli spazi vettoriali complessi; abbiamo innanzitutto bisogno della seguente

Definizione 10.1. *Dato uno spazio vettoriale complesso X, due suoi sottoinsiemi A, B disgiunti, ed un iperpiano reale H, diremo che H separa i due insiemi se A è contenuto in uno dei due semispazi determinati da H e B è contenuto nell'altro semispazio.*

Possiamo, adesso, enunciare il

Teorema di Separazione. *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti di uno spazio vettoriale X. Si supponga che o X abbia dimensione finita oppure che $cor(A) \cup cor(B) \neq \emptyset$. Allora A e B possono essere separati da un iperpiano reale.*

Dimostrazione. La dimostrazione di tale risultato è esattamente la stessa di quella del Teorema di Separazione del §7; per acquisire la tesi è sufficiente osservare che l'iperpiano M ivi definito è, in realtà, un iperpiano reale (Teorema 5.10 ed Osservazione 5.1).∎

Per quanto riguarda l'estensione del Teorema di Hahn-Banach al caso di spazio vettoriale X complesso occorre, prima di enunciarlo, fare alcune osservazioni preliminari, relative agli elementi del duale di X.

Sia $f : X \to \mathbb{C}$; per ogni $x \in X$ si ha

$$f(x) = \mathcal{R}e\, f(x) + i\mathcal{I}m\, f(x)$$

dove la applicazioni $x \to \mathcal{R}e\, f(x)$ e $x \to \mathcal{I}m\, f(x)$ sono funzionali reali (la dimostrazione viene lasciata al lettore); inoltre, si ha, per ogni $x \in X$,

$$\mathcal{R}e\, f(ix) + i\mathcal{I}m\, f(ix) = f(ix) = if(x) = i[\mathcal{R}e\, f(x) + i\mathcal{I}m\, f(x)] = -\mathcal{I}m\, f(x) + i\mathcal{R}e\, f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}m\, f(x) = -\mathcal{R}e\, f(ix);$$

ne viene che

$$f(x) = \mathcal{R}e\, f(x) - i\,\mathcal{R}e\, f(ix) \qquad \forall x \in X \qquad (10.1).$$

D'altra parte, se $f : X \to \mathbb{R}$ è un funzionale reale, la (10.1) permette di definire un unico elemento di X' avente proprio f come parte reale, cosicché vi è una corrispondenza biunivoca fra i funzionali reali su X e gli elementi di X'.

Possiamo, allora, enunciare il seguente

Teorema di Hahn-Banach. *Siano X uno spazio vettoriale complesso, M un suo sottospazio lineare e $\phi \in M'$. Esista una funzione convessa $g : X \to \mathbb{R}$, che domina $\mathcal{R}e\,\phi$ su M. Allora, esiste una estensione $\psi \in X'$ tale che*

$$\mathcal{R}e\,\psi(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X.$$

la cui dimostrazione viene lasciata al lettore. Interessante è il seguente Corollario che troverà applicazioni in seguito

Corollario 10.1. *Siano X uno spazio vettoriale complesso, M un suo sottospazio lineare e $\phi \in M'$. Esista una funzione convessa $g : X \to \mathbb{R}$, che domina $|\phi|$ su M; si supponga inoltre che $g(\lambda x) \leq g(x)$, per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$. Allora, esiste una estensione $\psi \in X'$ tale che*

$$|\psi(x)| \leq g(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $|\phi(x)| \leq g(x)$, per ogni $x \in M$, segue che g domina $\mathcal{R}e\,\phi$ su M. Esiste allora una estensione $\psi \in X'$ tale che

$$\mathcal{R}e\,\psi(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X.$$

Scelto, adesso, $x \in X$ si trovi $\alpha_x \in [0, 2\pi]$ tale che $|\psi(x)| = e^{i\alpha_x}\,\psi(x)$; si ha così

$$|\psi(x)| = e^{i\alpha_x}\,\psi(x) = \psi(e^{i\alpha_x}\,x) = \mathcal{R}e\,\psi(e^{i\alpha_x}\,x) \leq g(e^{i\alpha_x}\,x) \leq g(x).$$

La dimostrazione è conclusa.■

Lasciamo al lettore il compito di estendere al caso di spazi vettoriali complessi, qualora possibile, gli altri risultati dei paragrafi §7, §8, §9 equivalenti al Teorema di Separazione ed al Teorema di Hahn-Banach.