

**“COMPUTABILITÀ”**  
**LAUREA SPECIALISTICA IN INFORMATICA**  
**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA**  
**ANNO ACCADEMICO 2006/07**

I appello Sessione anticipata – 7 Febbraio 2007

Svolgere i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

**I PARTE**

**ESERCIZIO 1**

Si dimostri che esistono due funzioni totali e non calcolabili  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tali che il loro prodotto  $f(x) \cdot g(x)$  risulti calcolabile.

**ESERCIZIO 2**

Data una funzione  $f$  unaria calcolabile, si dimostri che anche la seguente funzione è calcolabile:

$$g(x) \simeq \begin{cases} f(x^2) & \text{se } x^2 = f(x^2 + y^2), \text{ per qualche } y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**ESERCIZIO 3**

Dopo aver definito in maniera precisa gli operatori di *sommatoria* e *prodotti limitati*, si enunci e si dimostri una proprietà che li riguarda.

**II PARTE (II prova in itinere)**

**ESERCIZIO 4**

(a) Si dimostri che se  $P(x)$  è un predicato unario parzialmente decidibile, allora esiste un predicato decidibile  $R(x, y)$  tale che

$$P(x) \iff (\exists y)R(x, y).$$

(b) Dato il predicato  $P(x) =_{Def} “x \in W_{4x} \vee 4x \in E_x”$ , si verifichi che  $P(x)$  è parzialmente decidibile e si esibisca un predicato decidibile  $R(x, y)$  tale che  $P(x) \iff (\exists y)R(x, y)$ .

**ESERCIZIO 5**

Dopo aver definito gli insiemi  $W_x$  ed  $E_x$ , per  $x \in \mathbb{N}$ , si studi la decidibilità e la parziale decidibilità del predicato binario

$$P(x, y) =_{Def} “x + y \in W_{x+y} \cup E_y”$$

e della sua negazione  $\neg P(x, y)$ .