

# *Filtraggio nel Dominio della Frequenza*

## *Parte II*

*Prof. Sebastiano Battiato*

Multimedia - Prof. S. Battiato



## **Outline**

- **Filtraggio**
  - **Low Pass ideale, Butterworth, Gaussiano**
  - **High Pass ideale, Butterworth**
  - **Sharpening**
  - **Omomorfico**
- **Esercitazione**

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Frequenze: Low and High

Esclusi i casi banali è normalmente impossibile fare associazioni dirette fra specifiche parti dell'immagine e la sua trasformata (perdita di localizzazione spaziale).

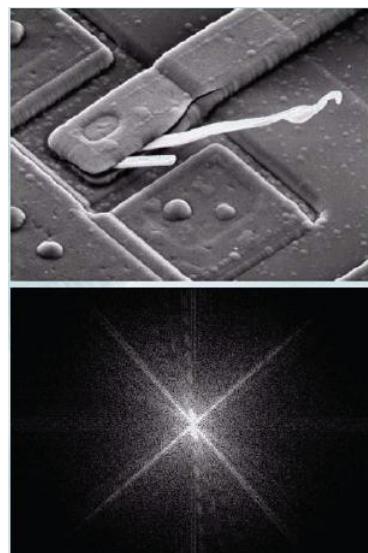
Ricordando che la frequenza è legata alla velocità di variazione è però possibile associare le **basse** frequenze alle zone **uniformi** dell'immagine, quelle **alte** alle variazioni più o meno brusche e quindi ai **bordi** o al **rumore**.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

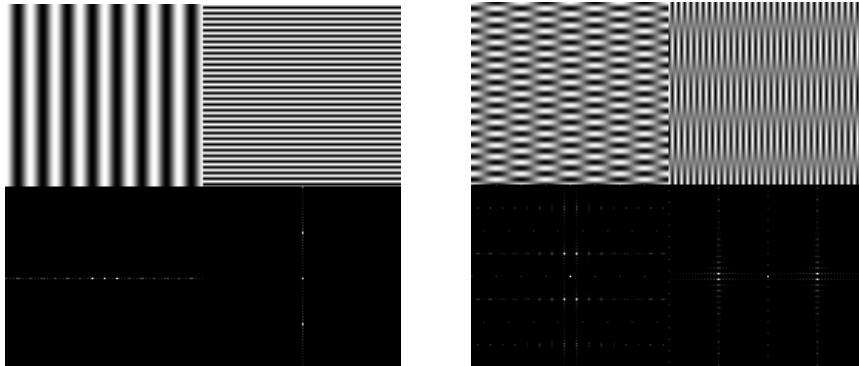
Nella trasformata qui accanto è possibile apprezzare le componenti ad alta frequenza a  $45^\circ$  corrispondenti ai bordi a  $45^\circ$  degli oggetti, come pure la componente quasi verticale corrispondente alla transizione dell'oggetto bianco quasi orizzontale.



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

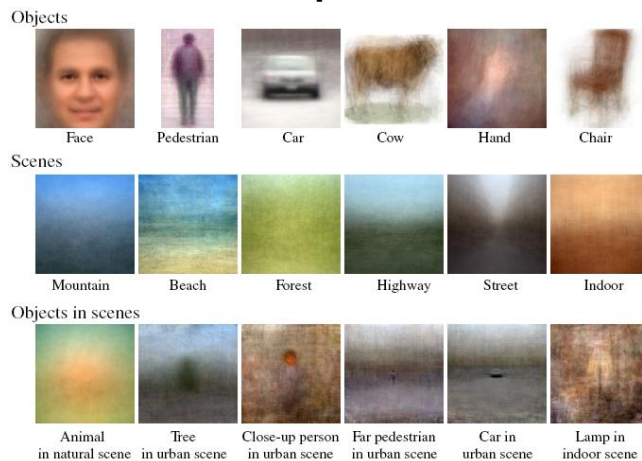


Si può fare di più? Si può andare cioè verso la “**semantica**” della scena?

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

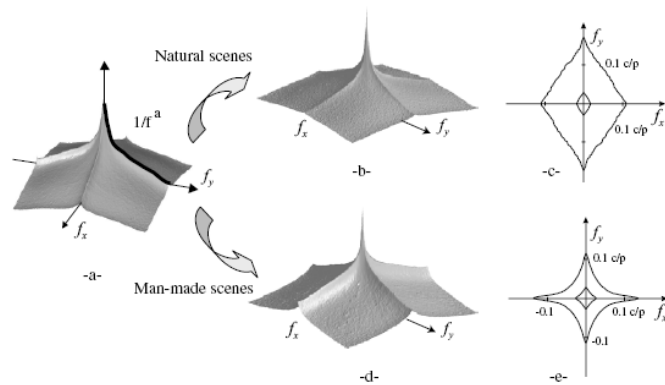


Alcuni ricercatori dell’MIT (USA – Torralba/Oliva) hanno pubblicato nel 2003 un articolo in cui si analizzano delle statistiche nel dominio di Fourier rispetto alla distribuzione dell’energia per varie classi (e categorie) di immagini naturali.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

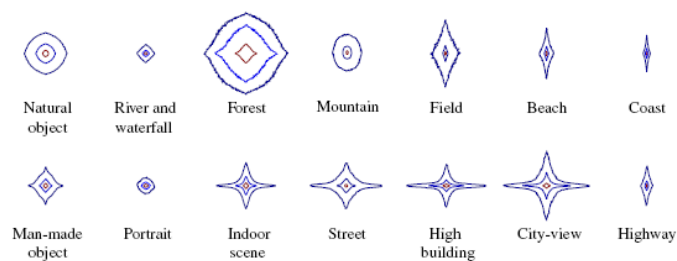


La distribuzione dello spettro medio su immagini naturali può essere approssimata dalla funzione  $1/f^\alpha$  (con  $\alpha$  circa uguale a 2). Inoltre è possibile ricavare una sorta di firma spettrale, racchiudendo in un grafico bidimensionale le frequenze che racchiudono il 50% e l'80% dell'energia totale.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

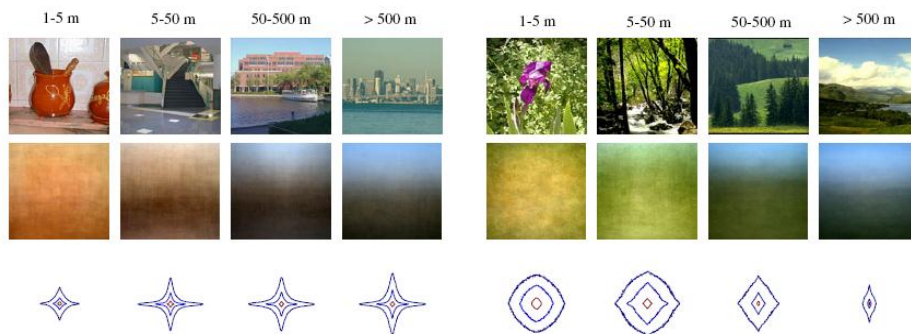


In questo caso il grafico si riferisce alle frequenze che racchiudono il 60%, l'80% e il 90% dell'energia totale.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Distribuzione delle Frequenze

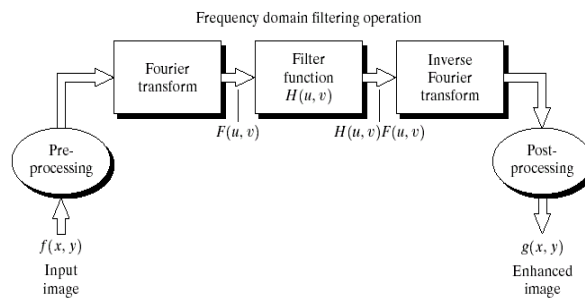


Robustezza rispetto alla scala dell'immagine?

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza



La funzione  $H(u, v)$  prende il nome di filtro poiché agisce su alcune frequenze della trasformata lasciando le altre immutate. Molto spesso la funzione  $H$  è una funzione reale e ciascuna sua componente moltiplica sia la corrispondente componente reale che quella immaginaria della  $F$ . Questo tipo di filtri viene detto *zerophaseshift* perché non introduce sfasamento.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

- Le fasi di pre e postprocessing sono caratterizzate dalla traslazione dell'origine e da eventuali *cropping*, scalamenti dei livelli di grigio, conversione da intero a float dei valori e viceversa, ecc.
- Il nucleo del filtraggio consiste nel modificare in qualche modo la trasformata dell'immagine e nel prendere poi la sua antitrasformata come immagine elaborata in uscita.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

Un filtro comune che prende il nome di *notch filter* è un filtro che annulla un valore della  $F$ . Annullando quello del punto  $(0,0)$  cioè di quello che sappiamo corrispondere al **valor medio** dei grigi dell'immagine, otteniamo un valore medio nullo, purtroppo anche tutti i valori inferiori al valor medio, adesso divenuti negativi, vengono sogliati a zero.

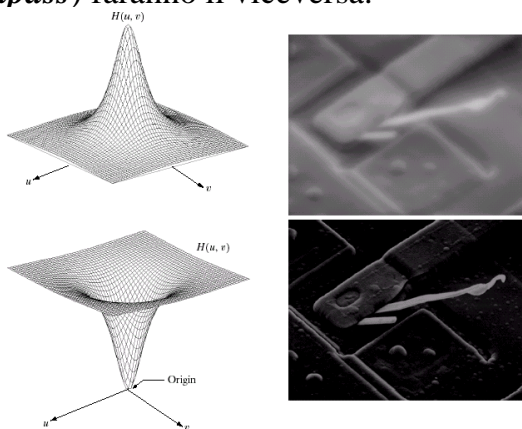


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

Come è possibile immaginare i filtri passabasso (*lowpass*) attenueranno le transizioni rapide e enfatizzeranno quelle lente; i filtri passaalto (*highpass*) faranno il viceversa.

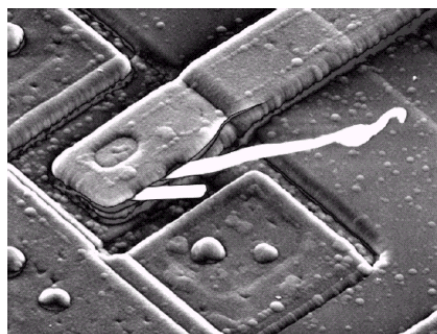


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

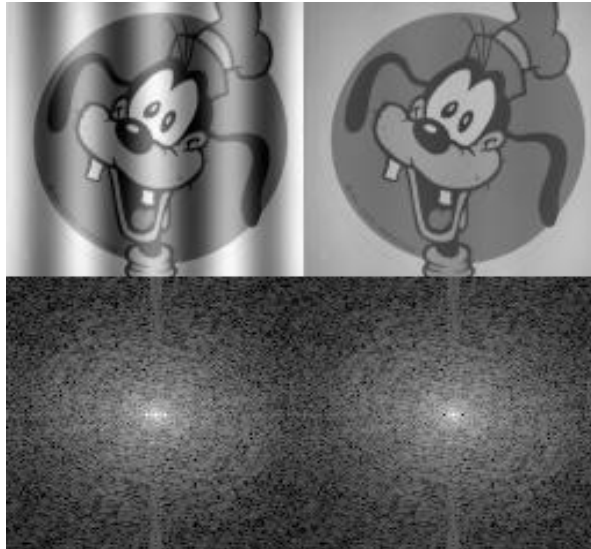
Per eliminare l'effetto di sogliatura introdotto dai filtri passaalto in seguito all'azzeramento della componente continua, si tende spesso ad aggiungere una costante a tutto il filtro così da non azzerare del tutto questa componente. L'immagine in figura è costruita aggiungendo un valore pari a metà dell'altezza del filtro.



Multimedia - Prof. S. Battiato



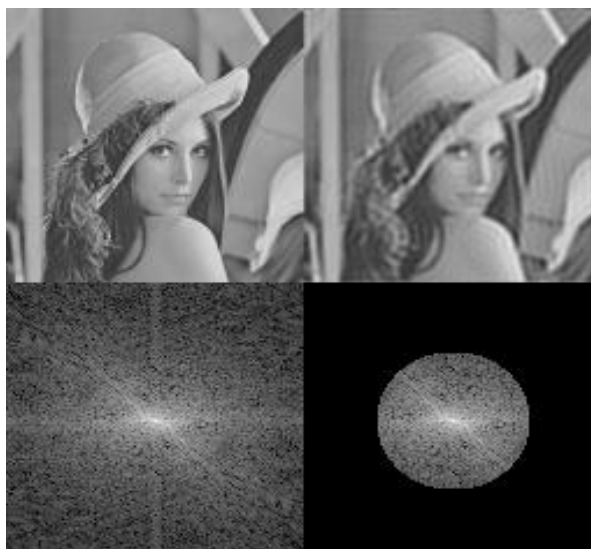
## Eliminazione di frequenze



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Compressione



Multimedia - Prof. S. Battiato





## Teorema della Convoluzione

Il fondamento teorico delle tecniche di elaborazione nel dominio della frequenza, basate sulla manipolazione della DFT dell'immagine, è rappresentata dal **teorema della convoluzione** che fa corrispondere, alla operazione così definita nel dominio spaziale:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$$

l'operazione, nel dominio delle frequenze:

$$G(u, v) = F(u, v) H(u, v)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Teorema della Convoluzione

Pertanto data una immagine  $f(x,y)$  e calcolata la sua trasformata  $F(u,v)$ , l'obiettivo di una elaborazione nel dominio della frequenza è scegliere una  $H(u,v)$  tale che l'immagine di uscita  $g(x,y)$  esibisca le proprietà desiderate, essendo:

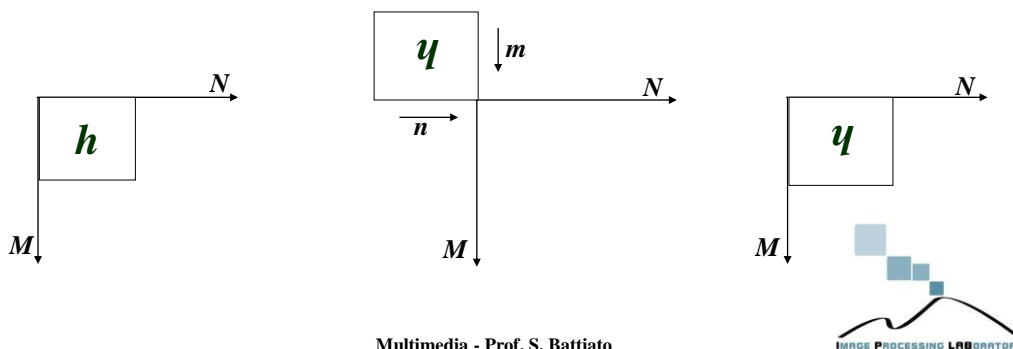
$$g(x, y) = F^{-1}\{F(u, v) H(u, v)\}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione e Filtraggio Spaziale

- L'espressione  $h(x-m, y-n)$ , per ogni coppia di coordinate  $(x, y)$  in cui va calcolato il valore dell'uscita  $g$ , indica che rispetto agli assi  $m$  e  $n$  la  $h$  deve essere ribaltata e poi traslata di  $x$  posizioni lungo  $m$  e di  $y$  posizioni lungo  $n$  (o alternativamente ruotare di  $180^\circ$  la  $h$ )



## Convoluzione e Filtraggio Spaziale

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n)$$

Se  $M = 3$  e  $N = 3$  otteniamo

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{9} \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 f(m, n) h(x-m, y-n) = \\ &= f(0,0)h(x, y) + f(0,1)h(x, y-1) + f(0,2)h(x, y-2) + \\ &+ f(1,0)h(x-1, y) + f(1,1)h(x-1, y-1) + f(1,2)h(x-1, y-2) + \\ &+ f(2,0)h(x-2, y) + f(2,1)h(x-2, y-1) + f(2,2)h(x-2, y-2) \end{aligned}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione e Filtraggio Spaziale

Se per esempio calcoliamo il valore di  $g(2,2)$  otteniamo :

$$\begin{aligned}
 g(2,2) &= \frac{1}{9} \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 f(m,n)h(2-m,2-n) = \\
 &= f(0,0)h(2,2) + f(0,1)h(2,2-1) + f(0,2)h(2,2-2) + \\
 &+ f(1,0)h(2-1,2) + f(1,1)h(2-1,2-1) + f(1,2)h(2-1,2-2) + \\
 &+ f(2,0)h(2-2,2) + f(2,1)h(2-2,2-1) + f(2,2)h(2-2,2-2)
 \end{aligned}$$

*Che succede agli indici?*

$$\begin{array}{cccccc}
 (0,0) & (0,1) & (0,2) & & (2,2) & (2,1) & (2,0) \\
 (1,0) & (1,1) & (1,2) & \xrightarrow{*} & (1,2) & (1,1) & (1,0) \\
 (2,0) & (2,1) & (2,2) & & (0,2) & (0,1) & (0,0)
 \end{array}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione e Filtraggio Spaziale

- I valori della  $f$  vengono moltiplicati per quelli della  $h$  ribaltata e traslata, e la loro somma così “pesata” contribuisce al valore dell’uscita  $g$ . Naturalmente si sommano solo i termini corrispondenti agli indici per i quali il prodotto è diverso da zero.
- La sola differenza tra l’operazione di **convoluzione** e quella di **filtraggio spaziale** precedentemente definita sta nel fatto che quest’ultima non prevede il ribaltamento. In sostanza le due operazioni coincidono se la maschera è **simmetrica** rispetto al suo punto centrale, come avviene per la maggior parte dei filtri adoperati per il miglioramento di qualità. Per i motivi suddetti le **maschere spaziali** sono anche dette **maschere di convoluzione**

Multimedia - Prof. S. Battiato



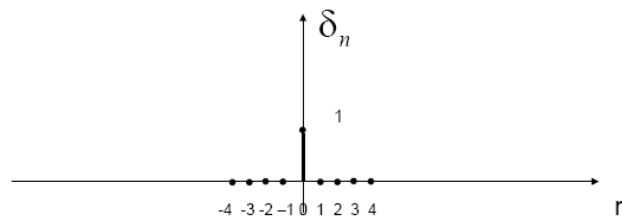
## Filtraggio Digitale ed Impulsi

Definiamo come **impulso discreto** la sequenza numerica

$$\{\delta_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$$

che vale 1 in  $n = 0$  ed è nulla altrove, ossia:

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Con semplici considerazioni si può generalizzare al caso bidimensionale, di intensità non unitaria, **non** necessariamente centrata nell'origine.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione ed Impulsi

- Consideriamo una funzione impulso di intensità  $A$  centrata nella coordinata  $(x_0, y_0)$  indicata da  $A\delta(x-x_0, y-y_0)$ . Risulta anche definita la seguente espressione:

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) A \delta(x-x_0, y-y_0) = A s(x_0, y_0)$$

- Se la funzione impulso la si considera centrata nell'origine e di intensità unitaria ( $A=1$ ) si ottiene:

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y) \delta(x, y) = s(0,0)$$

**La convoluzione di una funzione con un impulso copia il valore della funzione nella locazione specifica dell'impulso (Proprietà di Sifting)**

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione e DFT

Se adesso si calcola la trasformata di Fourier di un impulso unitario centrato nell'origine si ottiene:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \delta(x, y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} = \frac{1}{MN}$$

Considerando quindi la funzione  $f(x, y) = \delta(x, y)$  e calcolando la convoluzione di  $f(x, y)$  con una generica  $h(x, y)$  si ha

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m, n) h(x - m, y - n) = \frac{1}{MN} h(x, y)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Convoluzione Spaziale e DFT

Possiamo allora concludere utilizzando solo le proprietà della funzione “impulso” ed il teorema di convoluzione che esiste una relazione specifica tra il filtraggio nel dominio spaziale e quello nel dominio della frequenza:

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$\delta(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow \mathfrak{F}[\delta(x, y)] H(u, v)$$

$$h(x, y) = H(u, v)$$

I filtri nel dominio spaziale e nel dominio delle frequenze costituiscono una coppia di Fourier. Dato un filtro nel dominio delle frequenze è possibile ottenere il filtro nel dominio spaziale calcolando la trasformata inversa .... e viceversa. Si noti però che “tutte” le funzioni precedenti sono  $M \times N$ ....

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

- Se il filtro ha dimensioni confrontabili con quelle dell'immagine è più efficiente computazionalmente effettuare il filtraggio nel dominio delle frequenze.
- Con maschere più piccole diviene più efficiente il calcolo nel dominio spaziale.
- La definizione di un filtro nel dominio delle frequenze è più intuitiva.

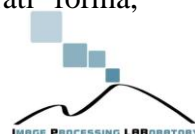
Multimedia - Prof. S. Battiato



## Terminologia

- La trasformata di Fourier è un'operazione lineare. Nella terminologia della teoria dei sistemi lineari, la  $h(x,y)$  definisce un filtraggio **lineare** e **spazio-invariante**
  - ✓ L'attributo **lineare** si riferisce al fatto che vale per l'operazione il principio di sovrapposizione degli effetti: date due immagini,  $f_1$  e  $f_2$ , il cui filtraggio mediante la  $h$  dà luogo alle immagini  $g_1$  e  $g_2$ , il risultato del filtraggio della combinazione lineare  $a_1f_1+a_2f_2$  è la combinazione lineare  $a_1g_1+a_2g_2$
  - ✓ L'attributo **spazio-invariante** si riferisce al fatto che la maschera è la stessa per tutti i punti  $(x,y)$ : al variare delle coordinate la maschera trasla semplicemente, mantenendo inalterata forma, dimensioni e pesi

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Terminologia

- Nel dominio della frequenza, alla risposta impulsiva corrisponde la **funzione di trasferimento** del filtro  $H(u,v)$ .
- Nella terminologia dell'ottica, invece, la  $H(u,v)$  è chiamata **funzione di trasferimento ottica**, mentre la  $h(x,y)$  è chiamata **point spread function**(PSF) o funzione di *blurring*.
- Questo nome è dovuto al fatto che un sistema ottico risponde ad un impulso (un punto luminoso) dando luogo ad un effetto di blurring (*spreading*), che lega la “larghezza” del punto alla qualità del sistema ottico

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

I filtri basati sulla funzione *gaussiana* sono particolarmente importanti per la semplicità di definizione ed in quanto sia la trasformata diretta che inversa sono delle funzioni gaussiane reali. Consideriamo la coppia di Fourier data da un filtro gaussiano nel dominio della frequenza e dalla sua trasformata nel dominio spaziale:

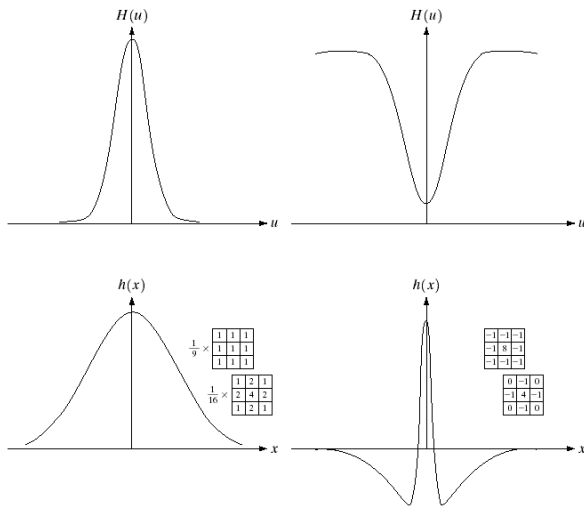
$$H(u) = e^{-\frac{u^2}{\sigma^2}} \quad h(x) = \sqrt{2\pi} A e^{-2\pi\sigma^2 x^2}$$

È possibile osservare che queste funzioni si comportano reciprocamente rispetto alle loro trasformate: all'allargamento del profilo di una corrisponde il restringimento della trasformata e viceversa; quando tende ad infinito  $H(u)$  tende a una funzione costante e  $h(x)$  tende ad un impulso.

Multimedia - Prof. S. Battiato



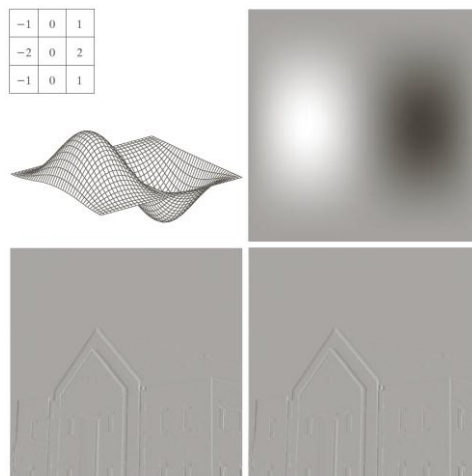
## Filtraggio nel Dominio della Frequenza



La figura riporta un filtro **passabasso** (ottenuto con una gaussiana) ed un **passaalto** (ottenuto come differenza di due gaussiane) e le relative trasformate nel dominio spaziale.

Si può notare come le maschere 3x3 ricalcano con i loro coefficienti l'andamento della curva.

Multimedia - Prof. S. Battiato



Multimedia - Prof. S. Battiato





## Smoothing

- I filtri di *smoothing*, come già visto, servono ad eliminare le brusche transizioni ed il rumore; questo corrisponde nel dominio della frequenza ad attenuare le componenti ad alta frequenza.
- Esistono molti tipi di *lowpass filter*: i principali sono quello *ideale*, quello di *Butterworth* e quello *Gaussiano*.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Smoothing

I filtri **ideali** eliminano totalmente tutte le componenti di frequenza che nel rettangolo delle frequenze distano dall'origine (centrata) più di  $D_0$

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

dove  $D(u, v)$  è la distanza dall'origine ed è data da :

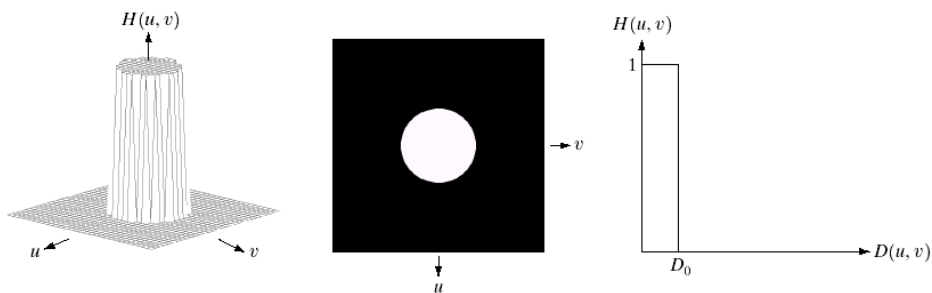
$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

$D_0$  è la **frequenza di taglio** del filtro. Nella rappresentazione 3-D è più appropriato parlare di un luogo di frequenze di taglio, costituito dalla circonferenza, centrata nell'origine, di raggio  $D_0$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Smoothing Ideale

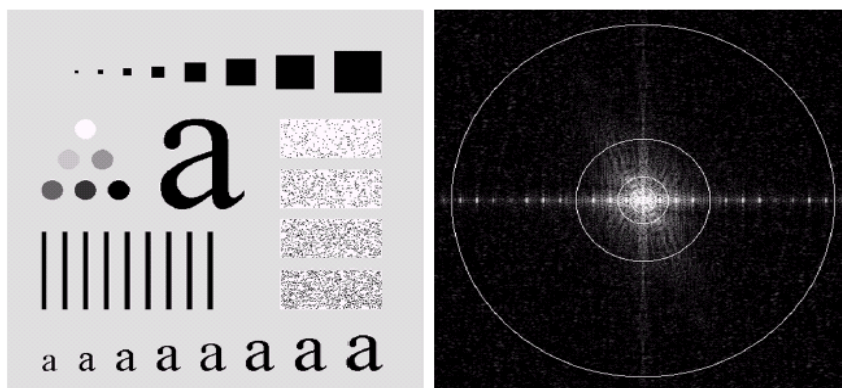


- Il termine “**Ideale**” indica che tutte le frequenze all’interno di un cerchio di raggio  $D_0$  sono trasferite senza attenuazione, tutte quelle esterne sono annullate.
- L’idealità comporta impossibilità di una realizzazione fisica (sebbene possano realizzarsi in digitale con l’ausilio di un computer).

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Smoothing ideale



- Al variare della frequenza di taglio  $D_0$  il filtro permetterà il passaggio di diverse porzioni dello **spettro di potenza** dell’immagine. Nel primo cerchio sovrapposto alla trasformata di Fourier, con raggio di appena 5 pixel è contenuto il 92% dell’energia, ma nell’8% rimanente è contenuta buona parte dell’informazione legata ai dettagli.
- **I filtri ideali causano un forte fenomeno di sfocatura ad anello (*ringing*)**

Multimedia - Prof. S. Battiato



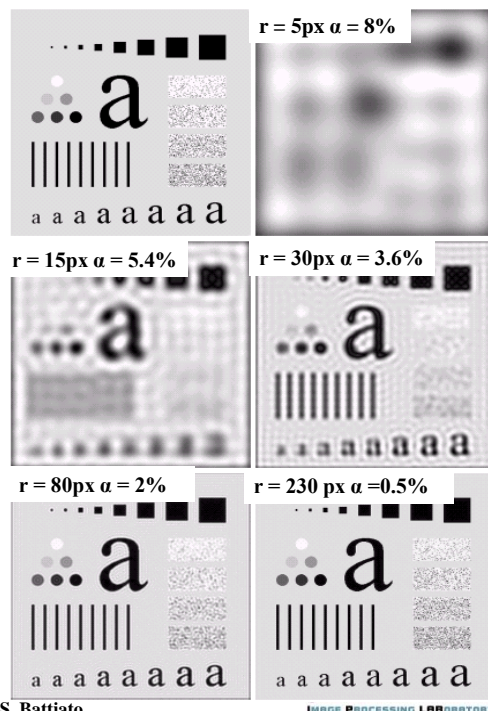
## Smoothing ideale

La figura mostra il risultato del filtraggio di smoothing realizzato scegliendo raggi via via crescenti. La percentuale di spettro considerata e rimossa dal filtraggio può essere calcolata nella seguente maniera:

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u,v)$$

$$\alpha = 100 \left( 1 - \frac{\sum \sum P(u,v)}{P_T} \right)$$

$u, v$  tali che  $D(u,v) \leq D_0$   
con un certo raggio  $r$



Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Effetto Ringing

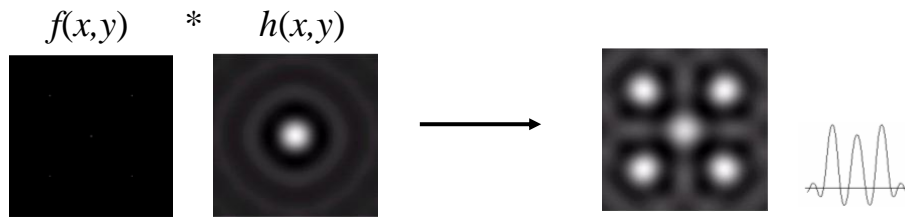


L'origine dell'effetto di *ringing* è legato alla funzione  $h(x,y)$  antitrasformata del filtro lowpass ideale (ILPF). La componente centrale è responsabile del *blurring* quelle negative e poi positive concentriche generano gli anelli visibili nella immagine.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Effetto Ringing



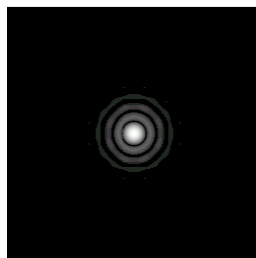
Come ulteriore esempio si osservi l'immagine risultante dal filtraggio dei 5 singoli pixel nell'immagine di sinistra (assimilabile ad una particolare funzione impulso). L'immagine a destra mostra come l'interferenza tra gli anelli dei singoli punti rende ancora più pesante l'effetto di *ringing*.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Effetto Ringing

Pertanto, se l'immagine  $f(x,y)$  fosse costituita da un solo pixel bianco su sfondo nero (approssimazione di un impulso), la risposta del filtro sarebbe la seguente:



Se l'immagine fosse costituita da due punti bianchi su sfondo nero, l'effetto della convoluzione dell'immagine con la  $h(x,y)$  sarebbe la replica di quest'ultima nei punti di applicazione degli impulsi

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ancora Ringing

- Gli anelli generati dalla risposta a ciascuno degli impulsi hanno **raggio inversamente proporzionale** al valore della frequenza di taglio del filtro e tendono ad interferire anche in relazione alla distanza tra i due impulsi
- Quindi il **ringing** è tanto più accentuato quanto minore è la frequenza di taglio, mentre al crescere della frequenza di taglio gli anelli diventano via via meno larghi e più finemente distanziati, cosicchè il **ringing** diminuisce

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ancora Ringing

- Quando la frequenza di taglio è oltre l'intervallo di definizione della  $F(u,v)$ , la  $h(x,y)$  vale 1 ovunque e la convoluzione si riduce alla  $f(x,y)$ , che rimane inalterata
- In immagini più complesse, ogni pixel può essere considerato un impulso di intensità proporzionale al valore del pixel, e l'effetto complessivo può essere spiegato ancora con l'applicazione dei concetti illustrati

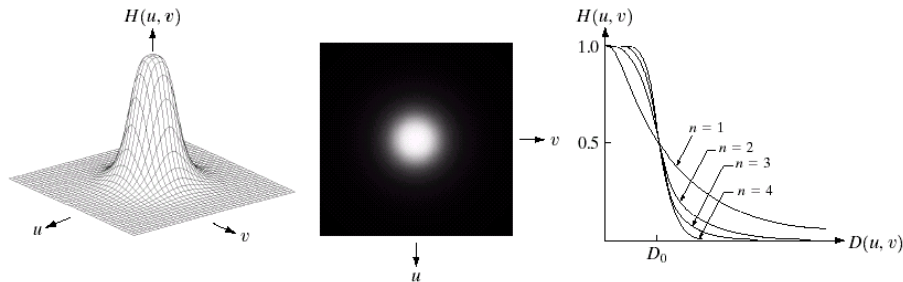
Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtri di Butterworth

La funzione di trasferimento del filtro *passa-basso di Butterworth* di ordine  $n$  e frequenza di taglio  $D_0$  è:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$



Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Filtro di Butterworth

- E' evidente che, a differenza del filtro passa-basso ideale, il filtro PB di Butterworth non determina un taglio netto in frequenza, in quanto la sua funzione di trasferimento non esibisce una discontinuità brusca.
- Il luogo delle frequenze di taglio è definito, in casi come questi, nei punti del piano  $u, v$  per i quali la  $H(u, v)$  decade ad una certa frazione del suo valore massimo.
- Con la definizione adoperata per la  $H(u, v)$ , per esempio, si ha  $H(u, v) = 0.5$  (50% del valore massimo) quando  $D(u, v) = D_0$ .
- Se invece ci si vuole riferire alla più usuale definizione di frequenza di taglio come quella alla quale la  $H(u, v)$  si riduce a  $1/\sqrt{2}$  del valore massimo, occorre modificare la  $H(u, v)$ :

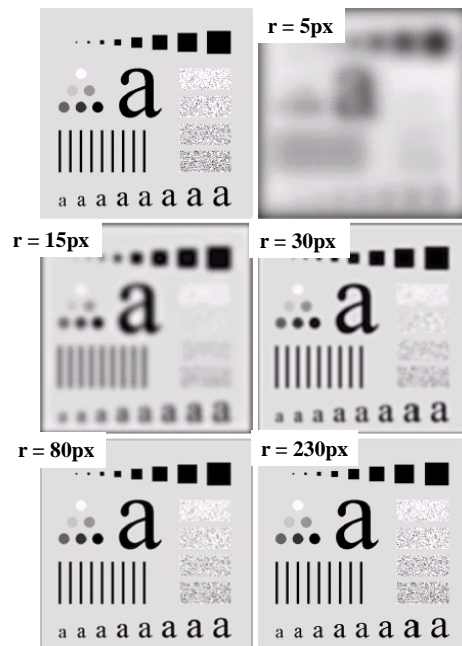
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \sqrt{2} - 1 \right] \left[ \frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0.414 \left[ \frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Filtro di Butterworth

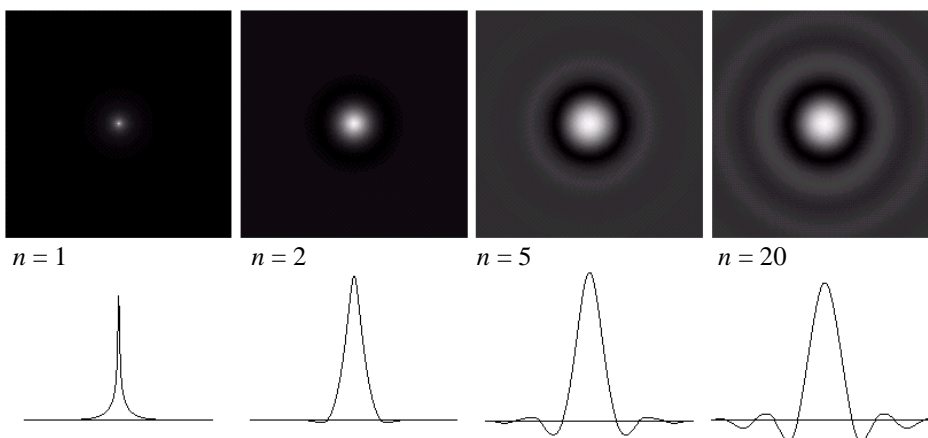
Applicando un filtro di Butterworth del secondo ordine (con  $n = 2$ ) alla stessa immagine di test, si può osservare come sia minore la differenza di *blurring* ottenuta al variare della frequenza di taglio (a causa della forma più dolce assunta dal profilo del filtro), ma come sia invece assente il fenomeno di *ringing*.



Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Filtro di Butterworth



Al crescere dell'ordine del filtro il profilo diviene sempre più netto e il filtro sempre più simile a quello ideale, cominciando ad assumerne le stesse caratteristiche e gli stessi difetti.

Multimedia - Prof. S. Battiato

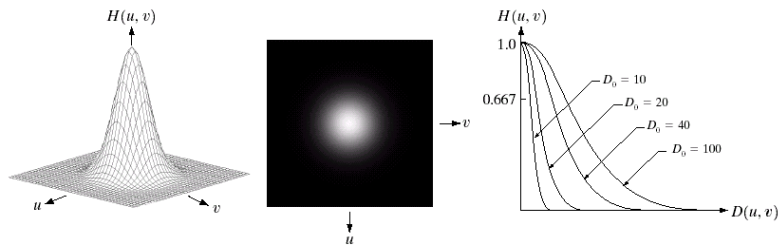
IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Filtro Gaussiano

➤ I filtri Gaussiani sono definiti da:

$$H(u, v) = e^{\frac{-D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$

Come già detto i filtri gaussiani hanno il grande vantaggio di avere come trasformata di Fourier ancora una gaussiana.

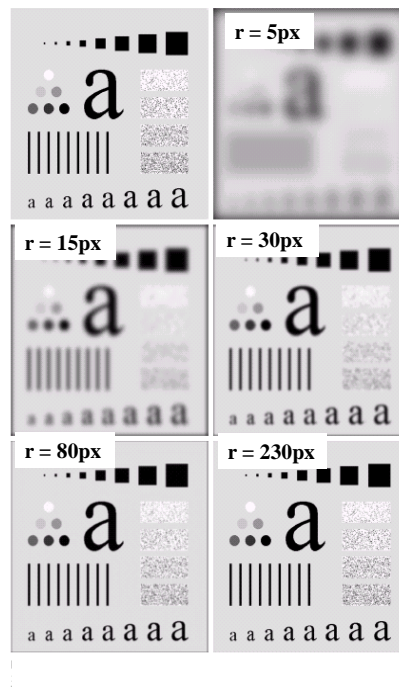


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtro Gaussiano

I filtri gaussiani presentano caratteristiche simili ai filtri di Butterworth di piccolo ordine, ma una più semplice realizzazione. Nel caso sia necessario un filtro con un profilo più netto i filtri di Butterworth rimangono da preferire.



Multimedia - Prof. S. Battiato





## Applicazioni

Le applicazioni dei filtri passabasso coprono un ampio campo di applicazioni:

### ✓ Il riconoscimento di caratteri.

Il trasferimento del testo via fax o altri processi generano un deterioramento caratterizzato dalla presenza di piccoli buchi, distorsioni della forma, ecc. ininfluenti per il riconoscimento umano, ma problematici per quello automatico.

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Applicazioni



- ✓ **Il processamento di immagini aeree e satellitari.** In figura sono applicati in sequenza 2 filtri di smoothing: il primo serve ad eliminare le righe orizzontali di scansione, il secondo ha lo scopo di eliminare quanti più dettagli possibili per una successiva analisi degli oggetti principali

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtri di Sharpening

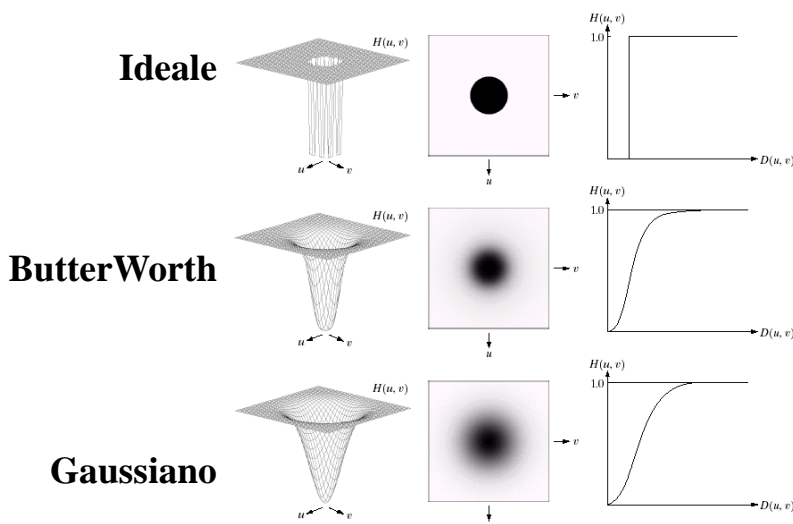
- Poiché i bordi e gli altri rapidi cambiamenti nei livelli di grigio sono legati alle componenti ad alta frequenza lo *sharpening* delle immagini si può ottenere con i filtri passaalto.
- Volendo effettuare l'operazione esattamente inversa ai filtraggi passabasso si può scrivere:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



### Filtri Passa Alto



In maniera duale a quanto già visto è possibile introdurre la famiglia dei filtri passa alto in grado di attenuare le componenti di alta frequenza

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtri Ideali Passa Alto

I filtri ideali passa alto (IHPF) eliminano totalmente tutte le componenti di frequenza che nel rettangolo delle frequenze distano dall'origine (centrata) meno di  $D_0$

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

dove  $D(u, v)$  è la distanza dall'origine ed è data da :

$$D(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2}\right)^2}$$

$D_0$  è la **frequenza di taglio** del filtro. Nella rappresentazione 3-D è più appropriato parlare di un luogo di frequenze di taglio, costituito dalla circonferenza, centrata nell'origine, di raggio  $D_0$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtro Passa Alto Ideale



Nelle immagini ottenute con  $D_0$  pari a 15, 30, 80 è possibile notare l'effetto di *ringing*, la scomparsa dei cerchietti poco contrastati rispetto all'origine ed inoltre a causa dello spot centrale nella rappresentazione spaziale l'enfaticizzazione dei piccoli quadratini. L'ultima immagine assume le caratteristiche di un filtro passaalto.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtro Passa Alto di Butterworth

La funzione di trasferimento del filtro *passa-alto di Butterworth* di ordine  $n$  e frequenza di taglio  $D_0$  è:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D_0}{D(u,v)} \right]^{2n}}$$

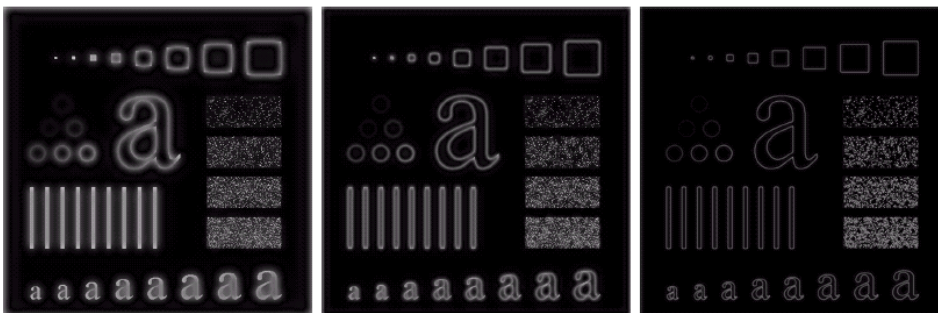
Come nel caso PB, si può dare una definizione del filtro tale che il luogo delle frequenze di taglio è costituito dai punti del piano  $u,v$  nei quali  $H(u,v)$  si riduce a  $1/\sqrt{2}$  del valore massimo:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1] \left[ \frac{D_0}{D(u,v)} \right]^{2n}} = \frac{1}{1 + 0.414 \left[ \frac{D_0}{D(u,v)} \right]^{2n}}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtro Passa Alto di Butterworth



I filtri di Butterworth non presentano effetto *ringing*, i bordi sono meno distorti il comportamento con i piccoli oggetti e l'effetto spot è comune ai filtri IHPF.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Passa Alto Gaussiano

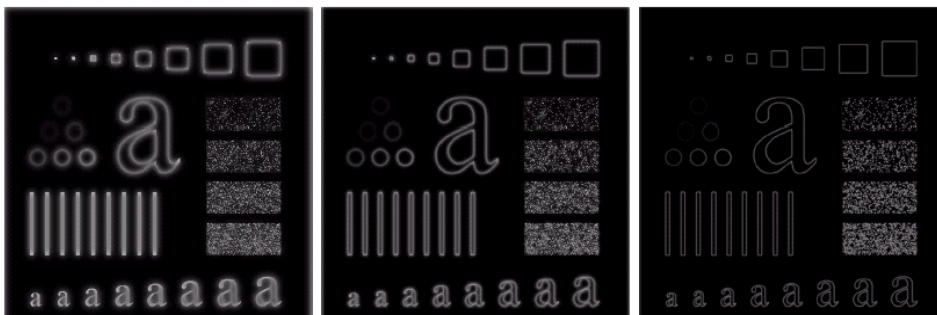
La funzione di trasferimento di un filtro *gaussiano* passaalto con frequenza di taglio a distanza  $D_0$  dall'origine è data da:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Passa Alto Gaussiano

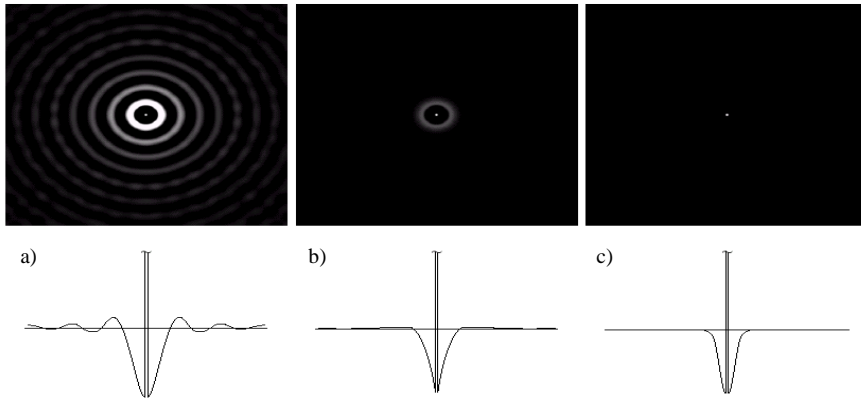


Il filtraggio gaussiano dà risultati sensibilmente più smussati che negli altri due tipi e anche il filtraggio degli oggetti più piccoli e delle barre sottili è più pulito.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ringing



Per gli stessi motivi del filtro passabasso anche il filtro passaalto ideale a) è soggetto al fenomeno del *ringing* come è possibile vedere dalla sua rappresentazione nel dominio spaziale. Anche in questo caso Butterworth b) e il Gaussiano c) sono in pratica le alternative da preferire.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Esempio



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ancora Sharpening

➤ Un noto filtro per realizzare un *enhancement* controllato delle alte frequenze è il Filtro **Laplaciano**, già visto nel dominio spaziale. Si tratta di un filtro “*isotropico*”, la cui risposta cioè è indipendente dalla direzione della discontinuità ed è basato sull’utilizzo delle derivate seconde. In pratica enfatizza le eventuali discontinuità.

➤ Si può dimostrare che:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Leftrightarrow - \left[ \left( u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} \right)^2 \right] F(u, v)$$

➤ Il filtraggio si realizza nella seguente maniera:

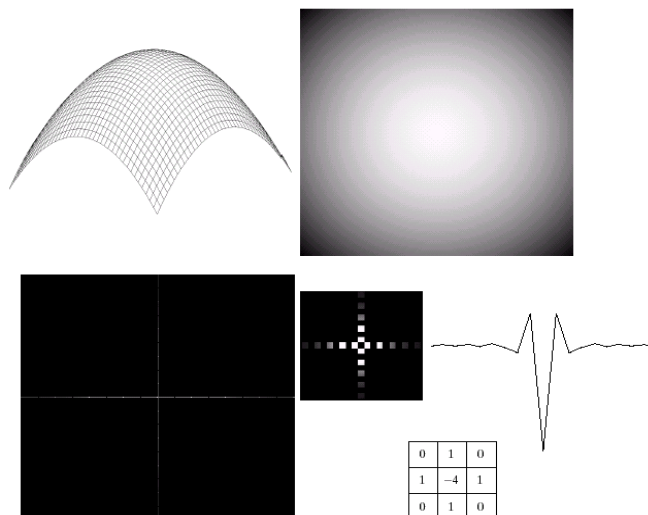
$$g(x, y) = f(x, y) - \nabla^2 f(x, y)$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} \left\{ \left[ 1 + \left( u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left( v - \frac{N}{2} \right)^2 \right] F(u, v) \right\}$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtro Laplaciano



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Laplaciano

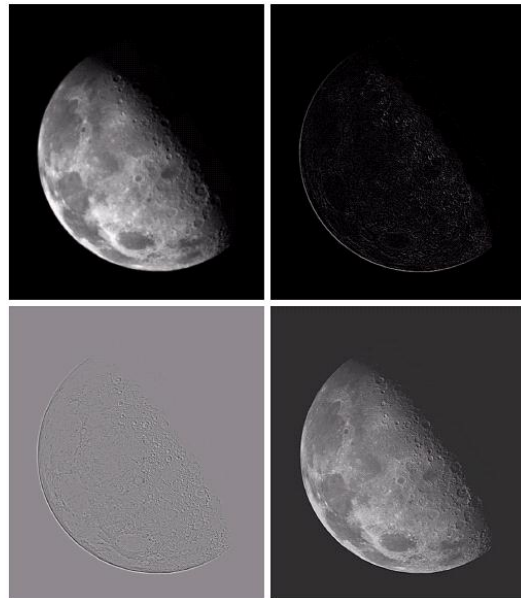
- Tutti le immagini risultanti dai filtraggi passa alto fin'ora incontrate avevano in comune lo sfondo nero causato dall'eliminazione della componente continua.
- La soluzione a questo problema consiste nell'aggiungere una porzione dell'immagine di sfondo all'immagine filtrata. Il filtraggio con il Laplaciano fa proprio questo aggiungendo l'intera immagine.

Multimedia - Prof. S. Battiato



### Laplaciano: un esempio

All'immagine in alto a sinistra viene applicato un filtro laplaciano. Non è possibile visualizzare pienamente l'output del filtro perché sono presenti valori sia positivi che negativi. La visualizzazione richiede quindi uno scaling opportuno dei valori. L'output del filtraggio evidenzia come i "dettagli" della scena siano maggiormente visibili.



Multimedia - Prof. S. Battiato





## Band-Pass Band Reject

Eseguire delle operazioni nel dominio di Fourier risulta particolarmente vantaggioso e per certi versi naturale in presenza di componenti in frequenza che presentino caratteristiche di “regolarità”. Per esempio, l’eliminazione o l’individuazione di un *pattern regolare* si presta bene a tale scopo. In questo caso, infatti, la periodicità del *pattern* forza la presenza di picchi molto evidenti nel dominio delle frequenze. Filtrando in maniera opportuna tali picchi, si possono quindi eliminare le frequenze indesiderate e di conseguenza il relativo rumore periodico senza alterare il contenuto informativo complessivo.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Band-pass Band-reject

Un filtro **passa-banda** o **band-pass** (o **band-reject** a seconda del punto di vista) individuato un determinato *range* di frequenze costruisce una maschera opportuna  $H$  in grado di eseguire tale filtraggio. Anche questi filtri possono essere costruiti a partire dai filtri *low-pass* (o *high-pass*) già visti. Per esempio, dati i filtri ideali *low-pass*  $H_1$  e  $H_2$  con frequenza di taglio rispettivamente  $D_0$  e  $D_1$  con  $D_1 > D_0 > 0$ , è possibile costruire un filtro band-pass nella seguente maniera:

$$H_{pb} = H_2 - H_1$$

in grado di far “passare” le sole frequenze la cui distanza dall’origine è compresa tra  $D_0$  e  $D_1$ .

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Band-pass e Band-reject

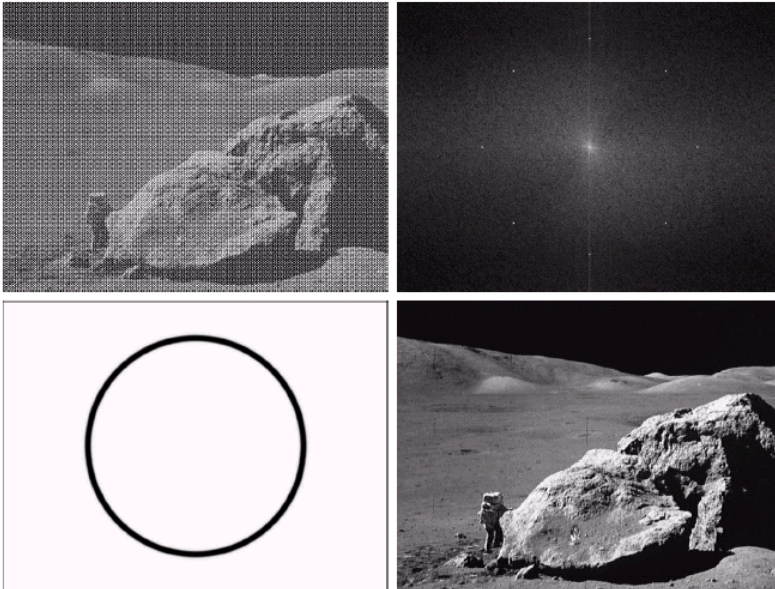
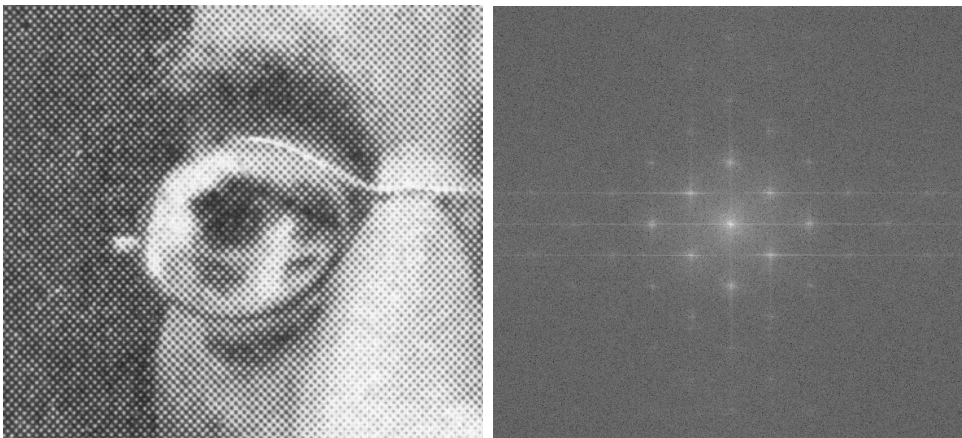


Immagine corrotta da rumore periodico *sinusoidale*, completamente rimosso grazie ad un filtro “band-reject”.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Descreening: input



Multimedia - Prof. S. Battiato



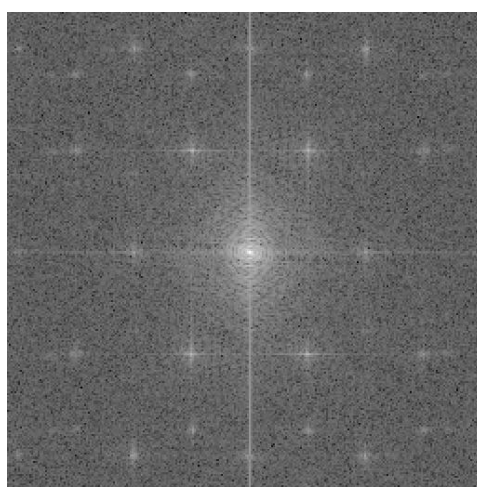
# Descreening



Multimedia - Prof. S. Battiato



# Descreening: Input



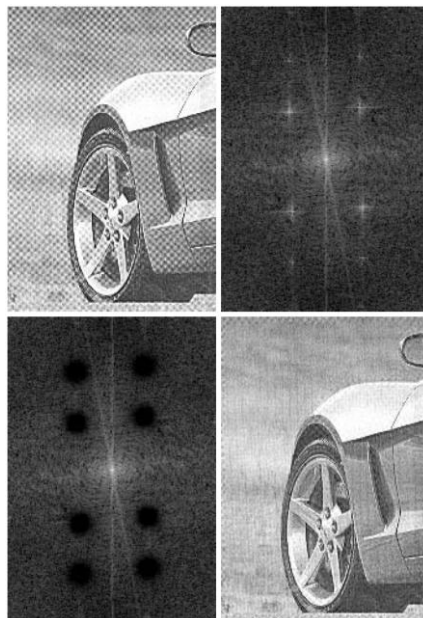
Multimedia - Prof. S. Battiato



# Descreening



Multimedia - Prof. S. Battiato



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ancora Sharpening

- Talvolta è utile incrementare il contributo dell'immagine originale. Questo approccio viene detto **highboost filtering**, ed è una generalizzazione dell'*unsharp masking*.

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

$$f_{hb}(x, y) = A f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

$$f_{hb}(x, y) = (A-1) f(x, y) + f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

$$f_{hb}(x, y) = (A-1) f(x, y) + f_{hp}(x, y)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Ancora Sharpening

- L'*unsharp masking* e l'*highboost filtering* possono essere ottenuti direttamente nel dominio della frequenza scrivendo:

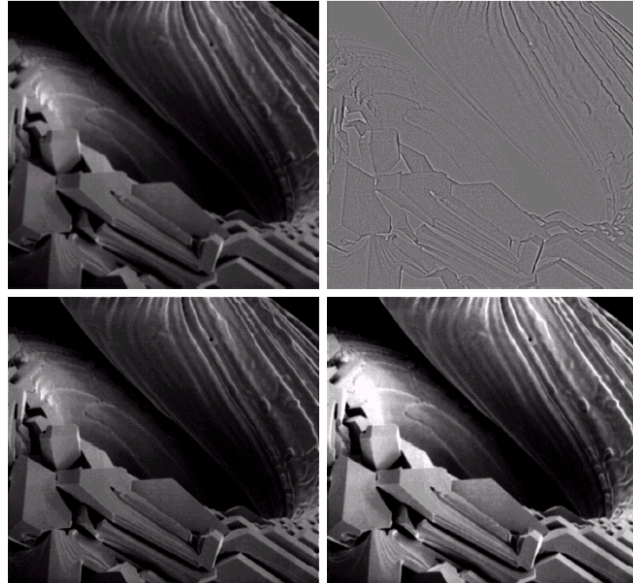
$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

$$H_{hb}(u, v) = (A-1) + H_{hp}(u, v)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



High Boost filtering  
ottenuto utilizzando un  
Laplaciano applicato  
con differenti valori di  
 $A$  (2, 2.7)



Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## High Frequency Emphasis

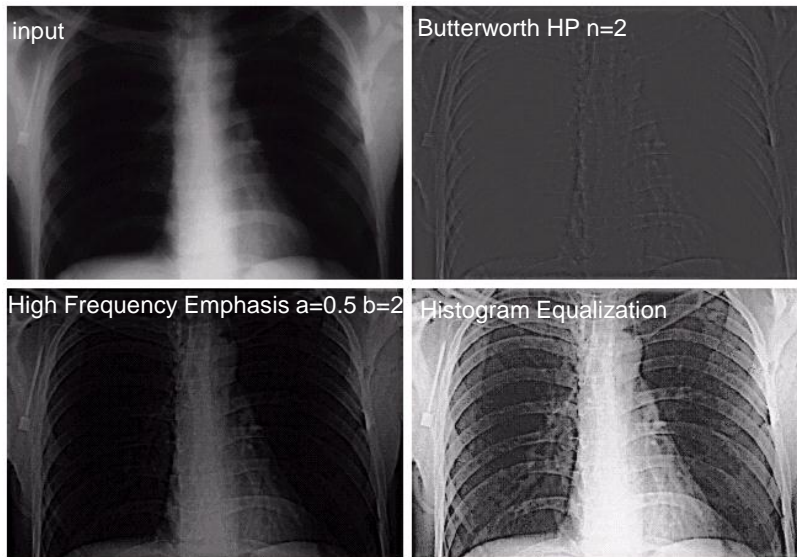
- Talvolta è vantaggioso accentuare il contributo al miglioramento dato dalle componenti ad alta frequenza, moltiplicando il filtro per una costante ed aggiungendo un offset per non eliminare la componente continua. Questo processo prende il nome di *High frequency emphasis*.

$$H_{hfe}(u, v) = a + b H_{hp}(u, v)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## High frequency emphasis: esempio



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio Omomorfo

Il modello **illuminazione-riflettanza**  $f(x,y)=i(x,y)r(x,y)$  può essere utilizzato, anche se non direttamente, come base di una procedura nel dominio della frequenza in grado di effettuare simultaneamente una compressione della gamma dinamica e un arricchimento del contrasto

L'uso diretto del modello non è possibile in quanto la trasformata del prodotto di due funzioni non è separabile, infatti:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} \neq \mathcal{F}\{i(x,y)\} \mathcal{F}\{r(x,y)\}$$

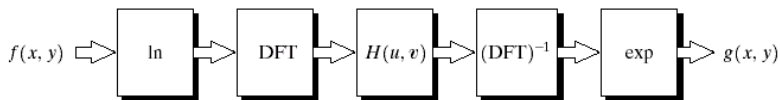
Passando ai logaritmi si ottiene

$$z(x,y) = \ln f(x,y) = \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio Omomorfo



E' possibile quindi filtrare la  $z(x,y)$ , avendo cura di applicare l'inverso del logaritmo, cioè un operatore esponenziale, subito dopo l'antitrasformata.

Il metodo presentato è basato su un caso speciale di una classe di sistemi, detti **omomorfici**.

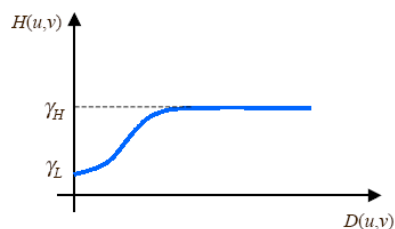
In particolare, in questo caso la separazione delle componenti di illuminazione e riflettanza è effettuata utilizzando il logaritmo, in modo che il filtro possa operare separatamente sulle due componenti: **l'illuminazione**, generalmente caratterizzata da *lente* variazioni spaziali, e la **riflettanza**, generalmente caratterizzata da *brusche* variazioni, come nei contorni degli oggetti.

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio Omomorfo

Dal punto di vista realizzativo, occorre un filtro  $H(u,v)$  in grado di operare in modo diverso sulle componenti di bassa frequenza e su quelle di alta frequenza della trasformata di Fourier dell'immagine, del tipo:



Se  $\gamma_L < 1$  e  $\gamma_H > 1$ , il filtro tende a smorzare il contenuto delle basse frequenze (illuminazione) e ad amplificare il contenuto delle alte frequenze (riflettanza). Esempio:

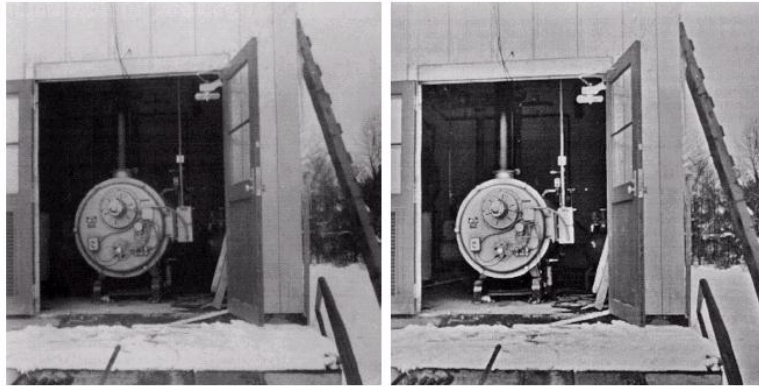
$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[ 1 - e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$

Multimedia - Prof. S. Battiato





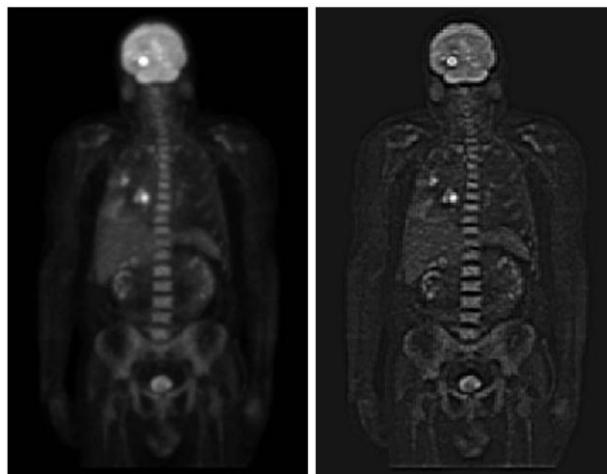
## Filtraggio Omomorfo: esempio1



Multimedia - Prof. S. Battiato



## Filtraggio Omomorfo: esempio 2

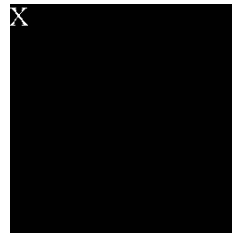


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Pattern Matching nel Dominio di Fourier

E' possibile utilizzare l'informazione spettrale, anche per individuare "patterns" specifici.

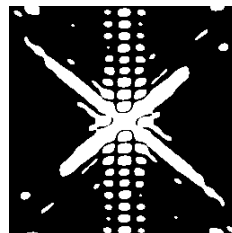
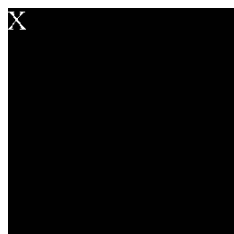


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Pattern Matching nel Dominio di Fourier

Possiamo utilizzare l'informazione contenuta nella maschera, passando nel dominio di Fourier. Dopo aver scalato i valori nel range  $[0, 255]$  è possibile utilizzare un valore di soglia (per esempio evidenziando solo le frequenze con almeno il 4% del valore massimo) per individuare le componenti in frequenza più importanti.

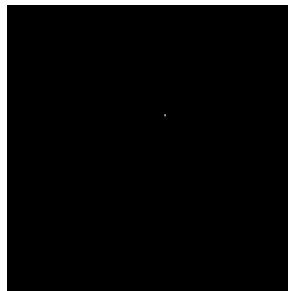


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Pattern Matching nel Dominio di Fourier

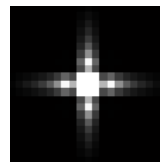
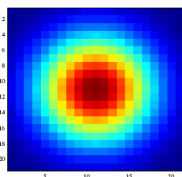
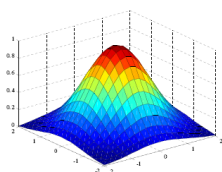
La maschera “sogliata” viene quindi utilizzata alla stessa stregua di un filtro  $H(u,v)$ , moltiplicandola cioè per la trasformata dell’immagine di input. Ritornando nel dominio spaziale, con un’antitrasformata, otteniamo un’immagine che può essere facilmente elaborata (un nuovo “thresholding”) per individuare la posizione del “pattern” cercato.



Multimedia - Prof. S. Battiato



## MATLAB: Esempio di DFT 2-D



```
>>[x,y]= meshgrid( [ -2:0.2:2] ) ;  
>>z= exp( -0.5.* (x.^ 2+ y.^ 2) ./ 0.9) ;  
>>surf(x,y,z) ;  
>>imagesc(z) ;  
>>yy=fft2(z);  
>>I=(fftshift(abs(yy)));  
>>imshow(I)
```

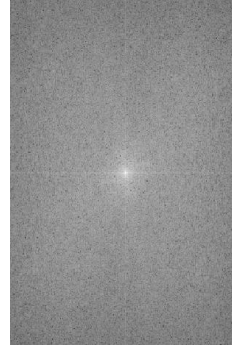
Multimedia - Prof. S. Battiato



## MATLAB: Esempio di DFT 2-D

```
>>%Esempio2
>>f=imread('barca.gif');figure; imshow(f);
>>F=fft2(f);
>>Fc=fftshift(F);
>>S=abs(Fc);
>>c=255/ log(max(S(:)));
>>S2=c.* log(1.+ S);
>>figure;
>>%imshow(uint8(S2));
>>imshow(S2, []);

%Trasformazione inversa
>>F1=ifftshift(Fc) %Inverte lo shift
>>f1=ifft2(F1); %Inverte la trasformata
>>f1=real(f1); %Prende la parte reale
>>figure;imshow(f1, []);
>>figure;imshow(uint8(f1));
```



Multimedia - Prof. S. Battiato



## MATLAB: Esempio di filtraggio LP

```
>f=imread('fishingboat.bmp'); figure; imshow(f);
>[M,N]=size(f); F=fft2(f);

>u=0:(M-1);
>v=0:(N-1);
> idx=find(u>M/2);
> u(idx)=u(idx)-M;
> idy=find(v>N/2);
> v(idy)=v(idy)-N;
> [V,U]=meshgrid(v,u);

>D0=10; %Frequenza di taglio
>D=sqrt(U.^2+v.^2);
>H_LP_Gauss=exp(-(D.^2)./(2*(D0^2)));

>G1=H_LP_Gauss.*F;
>g1=real(ifft2(G1));
>figure; imshow(g1, []);
```

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Padding...

- Nel dominio spaziale l'operazione di filtraggio mediante maschere di convoluzione necessita di opportuni accorgimenti ai bordi. In generale, utilizzando maschere con kernel piccoli, l'inconveniente viene aggirato facilmente.
- Nel dominio frequenziale, utilizzando filtri aventi dimensione dello stesso ordine di grandezza dell'immagine di input, il problema può dare origine ad errori ben più evidenti (*wraparound errors*).

Multimedia - Prof. S. Battiato



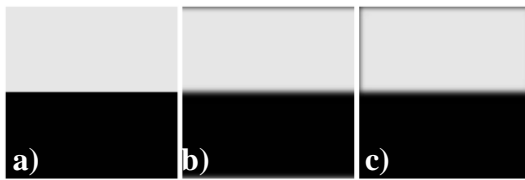
## Padding...

- Il problema può essere risolto estendendo le funzioni in ingresso aggiungendo degli zeri nella seguente maniera:
  - ✓ Se  $f(x,y)$  e  $h(x,y)$  hanno dimensione rispettivamente  $A \times B$  e  $C \times D$  basta estendere le 2 funzioni ad una dimensione  $P \times Q$  dove  $P \geq A+C-1$  e  $Q \geq B+D-1$
  - ✓ Se entrambe le funzioni hanno dimensione  $M \times N$  basta scegliere  $P \geq 2M-1$  e  $Q \geq 2N-1$

Multimedia - Prof. S. Battiato



## Padding:un esempio



L'immagine di input (a), cui viene applicata un filtro di smoothing rispettivamente con (c) e senza padding (b)



Multimedia - Prof. S. Battiato

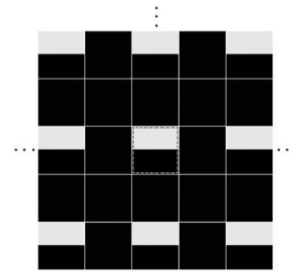
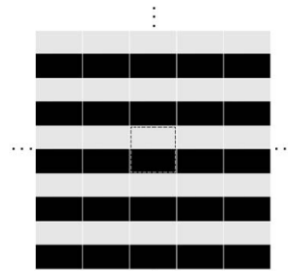


IMAGE PROCESSING LABORATORY

## MATLAB:Padding

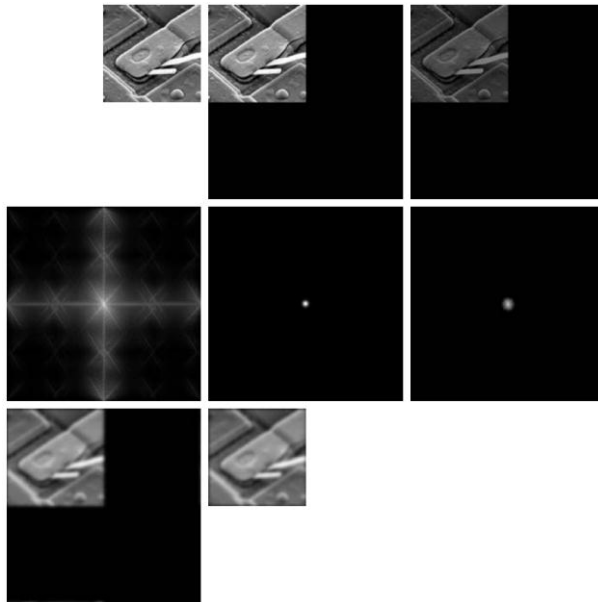
- In MATLAB basta passare come ulteriori argomenti alla funzione `fft2` la dimensione che contempra il padding degli zeri:

$$F = \text{fft2}(f, P, Q)$$

Multimedia - Prof. S. Battiato

IMAGE PROCESSING LABORATORY

## Esempio di filtraggio con Padding



a b c  
d e f  
g h

**FIGURE 4.36**  
(a) An  $M \times N$  image,  $f$ .  
(b) Padded image,  $f_p$  of size  $P \times Q$ .  
(c) Result of multiplying  $f_p$  by  $(-1)^{x+y}$ .  
(d) Spectrum of  $f_p$ . (e) Centered Gaussian lowpass filter,  $H$ , of size  $P \times Q$ .  
(f) Spectrum of the product  $HF_p$ .  
(g)  $g_p$ , the product of  $(-1)^{x+y}$  and the real part of the IDFT of  $HF_p$ .  
(h) Final result,  $g$ , obtained by cropping the first  $M$  rows and  $N$  columns of  $g_p$ .



Multimedia - Prof. S. Battiato

## MATLAB: freqz2

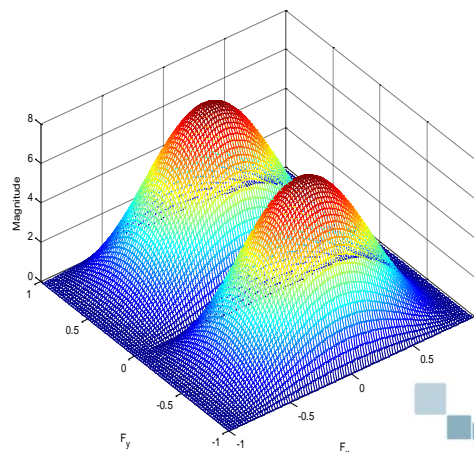
A partire da una maschera di convoluzione spaziale è possibile ottenere il corrispondente filtro nel dominio di Fourier, attraverso l'utilizzo della funzione `freqz2`:

```
>h=fspecial('sobel')
```

```
>h =
```

```
     1     2     1
     0     0     0
    -1    -2    -1
```

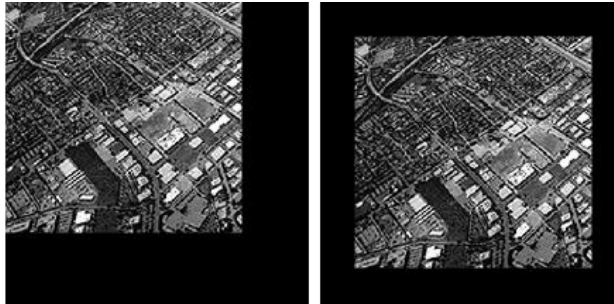
```
> freqz2(h,100,100)
```



Multimedia - Prof. S. Battiato

## Esercizi

(Es 4.21 - Gonzalez) - Che cosa cambia nell'eseguire un padding di zeri come realizzato in figura? (Notare che il numero complessivo di zeri è lo stesso nei due casi)

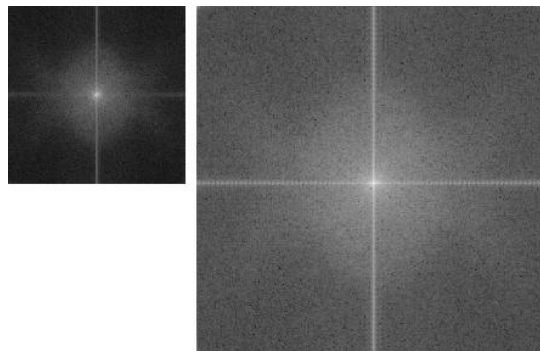


Multimedia - Prof. S. Battiato



## Esercizi

(Es.4.22 – Gonzalez) La figura mostra lo spettro della stessa immagine con e senza padding. Perché nel primo caso le componenti orizzontali e verticali hanno una magnitudo più alta?



Se parto da un'immagine  $M \times N$  e dopo aver realizzato il padding ottengo un'immagine  $P \times Q$ , che relazione matematica lega la componente DC  $F(0,0)$  nei due casi?

Multimedia - Prof. S. Battiato

