Filtraggio nel Dominio della Frequenza

Parte I

Prof. Sebastiano Battiato

Introduzione

Una funzione **periodica** può essere espressa come somma di seni e/o coseni di differenti frequenze e ampiezze (***Serie di Fourier***).

Anche una funzione non periodica, (*sotto certe condizioni*) può essere espressa come integrale di seni e/o coseni, moltiplicati per opportune funzioni-peso (***Trasformata di Fourier***).

Jean Baptiste Joseph Fourier
(Auxerre, 1768 –Paris, 1830)

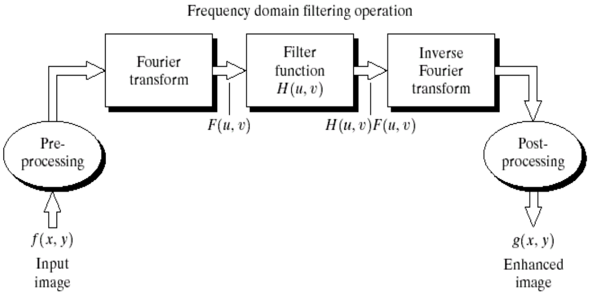
Introduzione

- Entrambe le rappresentazioni, condividono il fatto che una funzione possa essere "ricostruita" (**recovered**) con un semplice processo di inversione senza perdita di informazione. E' cioè possibile lavorare nel cosiddetto **dominio di Fourier** e tornare nel dominio originale della funzione in maniera del tutto naturale.

- Inizialmente l'analisi di Fourier trovò applicazione nel campo della diffusione del calore dove permise la formulazione e la risoluzione di equazioni differenziali di alcuni fenomeni fisici in maniera del tutto originale.

Introduzione

- Con l'avvento della **FFT** (**Fast Fourier Trasform**) il settore dell'elaborazione digitale dei segnali (**DSP – Digital Signal Processing**) ha subito una vera e propria rivoluzione, ed oggi questi concetti trovano applicazione nei più svariati campi industriali, dalla medicina, alle telecomunicazioni, ecc..



La Trasformata di Fourier (1)

Benchè altre trasformate siano oggi di uso frequente in molte applicazioni (restauro, codifica, descrizione di caratteristiche), la trasformata di ***Fourier*** mantiene un ruolo cardine nell'***image processing***. La trasformata di Fourier di una ***funzione continua f(x) di variabile reale x sotto opportune ipotesi di continuità***, è definita come:

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

Ricordando che $e^{-i2\pi ux} = \cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux$

la $F(u)$ è composta dalla somma di *infiniti* termini sinusoidali e cosinusoidali, e ogni valore di u determina la frequenza della coppia seno-coseno corrispondente.

La Trasformata di Fourier (2)

- Data la $F(u)$ è possibile risalire a $f(x)$ tramite **l'antitrasformata** definita dalla seguente formula:

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

- La trasformata e la antitrasformata esistono se *f(x)* è continua e integrabile e se *F(u)* è integrabile. Se *f(x)* è reale, *F(u)* è in generale complessa.

- In pratica la trasformata di Fourier riorganizza i dati in un altro spazio: lo spazio delle **frequenze**

Grandezze fondamentali

- Essendo una funzione complessa la $F(u)$ può essere scritta come

$$F(u) = R(u) + iI(u) = |F(u)|e^{i\phi(u)}$$

dove :

$$|F(u)| = \sqrt{[R^2(u) + I^2(u)]} \quad \textit{Spettro della Trasformata}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad \textit{Angolo di fase}$$

$$P(u) = |F(u)|^2 \quad \textit{Potenza (o Densità) Spettrale}$$

Estensione al 2-D

- E' immediata l'estensione al caso bidimensionale. Le condizioni di esistenza sono la continuità e l'integrabilità della $f(x,y)$ e l'integrabilità della $F(u,v)$. u e v sono le variabili frequenze, definite nel *piano delle frequenze*.

$$\Im\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\} = f(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{i2\pi(ux+vy)}dudv$$

Estensione al 2-D

Spettro della Trasformata $$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

Angolo di Fase $$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

Potenza Spettrale $$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

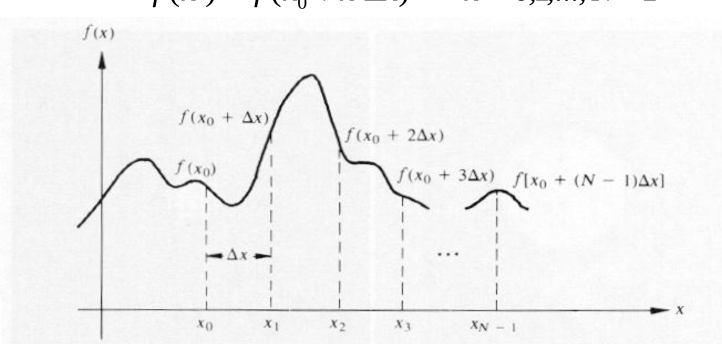
Discrete Fourier Transform

Una funzione continua $f(x)$ è discretizzata in una sequenza

$$\{f(x_0),\ f(x_0+\Delta x),\ f(x_0+2\Delta x), \ldots,\ f(x_0+[N-1]\Delta x)\}$$

considerando N campioni distanti Δx. Pertanto la funzione di variabile discreta x si può scrivere come

$$f(x') = f(x_0 + x'\Delta x) \qquad x' = 0,1,\ldots,N-1$$



Discrete Fourier Transform

In altri termini nel caso discreto 1-D la $f(x)$ diventa una sequenza di campioni uniformemente distanziati di Δx: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, …, $f(N-1)$.

Con questa notazione, la coppia di trasformate discrete nel caso 1-D è la seguente:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{\frac{-i2\pi ux}{N}} \quad per\ u = 0,1,\dots,N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{i2\pi ux}{N}} \ \mathrm{per}\ x = 0,1,\dots,N-1$$

Anche la frequenza u è una variabile discreta. In analogia a quanto visto per la $f(x)$, i valori u = 0, 1, …, N-1 nella DFT corrispondono ai campioni della trasformata continua per 0, Δu, $2\Delta u$, …, $(N-1)\Delta u$

Quindi $F(u)$ rappresenta $F(u\Delta u)$, così come $f(x)$ rappresenta $f(x_0+x\Delta x)$. La differenza è che il campionamento di $F(u)$ comincia nell'origine dell'asse frequenza.

Discrete Fourier Transform

La relazione tra Δu e Δx è la seguente:

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

Nel caso 2-D la coppia trasformata antitrasformata della sequenza bidimensionale $f(x,y)$ assume la seguente forma:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per\ \ u = 0,1,\dots,M-1 \ v = 0,1,\dots,N-1$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} \quad per\ x = 0,1,\dots,M-1 \ \ y = 0,1,\dots,N-1$$

u e v sono gli indici relativi agli assi frequenze discretizzati, mentre M e N sono le dimensioni (in pixel) dell'immagine. Il campionamento della $f(x,y)$ ha luogo nei punti di una griglia bidimensionale, con passi Δx e Δy.

Per la $F(u,v)$ valgono considerazioni analoghe a quelle fatte nel caso monodimensionale.

Discrete Fourier Transform

- In particolare il campionamento della $f(x,y)$ viene eseguito su una griglia 2-D (con opportuni Δx, Δy).

- La funzione discreta $f(x,y)$ rappresenta campioni della funzione $f(x_0+x\Delta x, y_0+y\Delta y)$ per $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ e $y=0, 1, 2, \ldots, N-1$.
- Le relazioni tra Δx e Δu e tra Δy e Δv sono le seguenti:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \qquad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Discrete Fourier Transform

- Infine quando le immagini sono campionate su una griglia quadrata ($M=N$, $\Delta x=\Delta$y) otteniamo:

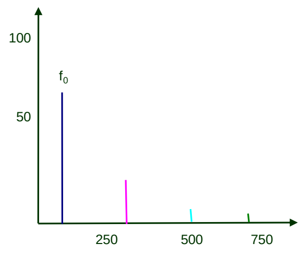
$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-i2\pi(\frac{ux+vy}{N})} \quad per\ u,v = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{i2\pi(\frac{ux+vy}{N})} \quad per\ x,y = 0,1,\ldots,N-1$$

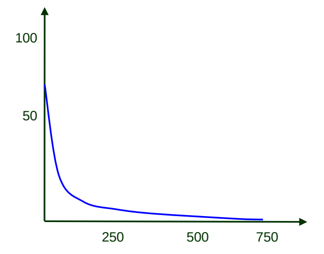
Analisi di forme d’onda – lo spettro

Riassumendo:

segnale periodico di frequenza f_0



segnale non periodico



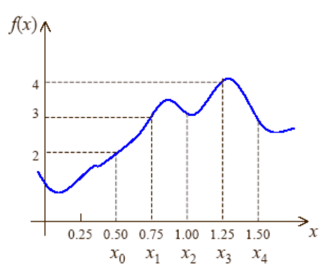
Il segnale è una somma di sinusoidi di frequenza multiple intere della frequenza del segnale (f_0).

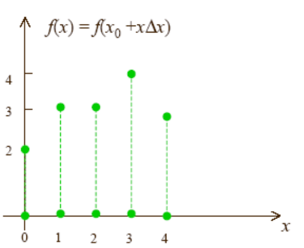
Lo spettro è formato da bande equidistanti.

Il segnale è una somma di sinusoidi di tutte le frequenze.

Lo spettro è formato da una linea continua.

Esempio 1-D





La $f(x)$ viene campionata a partire da x_0= 0.5, con Δx= 0.25, ottenendo i cinque campioni mostrati. Applicando la $F(u)$:

$$F(0) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp[0] = \frac{1}{5}\left[f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[2 + 3 + 3 + 4 + 2.8\right] = 2.96$$

$$F(1) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j2\pi\, x/5\right] = \frac{1}{5}\left[2\exp[0] + 3\exp\left[-j2\pi/5\right]\right.$$

$$\left. + 3\exp\left[-j4\pi/5\right] + 4\exp\left[-j6\pi/5\right] + 2.8\exp\left[-j8\pi/5\right]\right]$$

Esempio 1-D

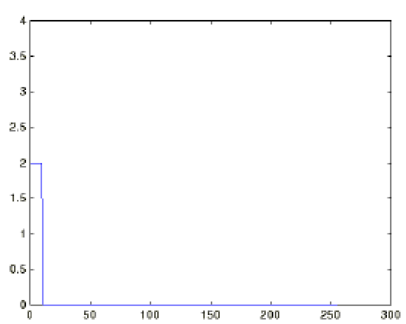
$$F(1) = \frac{1}{5}\left[2 + 3\exp\left[-{j2\pi}/{5}\right]\right.$$
$$\left. + 3\exp\left[-{j4\pi}/{5}\right] + 4\exp\left[-{j6\pi}/{5}\right] + 2.8\exp\left[-{j8\pi}/{5}\right]\right] =$$
$$= -0.3742 + j0.0795$$
$$F(2) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j4\pi\, {x}/{5}\right] = \cdots$$
$$F(3) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j6\pi\, {x}/{5}\right] = \cdots$$
$$F(4) = \frac{1}{5}\sum_{x=0}^{4} f(x)\exp\left[-j8\pi\, {x}/{5}\right] = \cdots$$

Tutti i valori della $f(x)$ contribuiscono alla costruzione di ciascuno dei campioni della $F(u)$. Analogamente, tutti i campioni della trasformata contribuiscono, durante la antitrasformazione, a ciascuno dei valori della $f(x)$. I campioni della $F(u)$ sono in genere complessi, per cui ciascuno di essi ha un modulo e una fase.

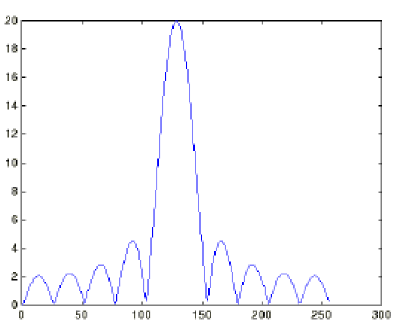
$$|F(0)| = 2.96 \qquad |F(1)| = \sqrt{0.3742^2 + 0.0795^2} = 0.3825 \qquad ecc.$$

Esempi

Un esempio di trasformata discreta nel caso 1-D: un ***impulso*** approssimato da un rettangolo di lato 10 e altezza 2, su una finestra complessiva di 256 valori di x:



$f(x)$, $x = 0, \ldots, 255$

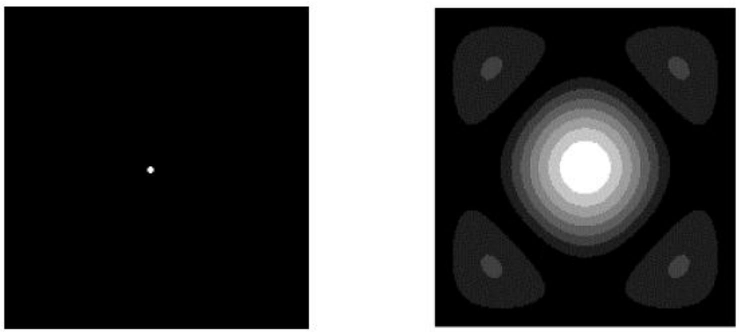


$|F(u)|$, $x = 0, \ldots, 255$

Esempi

Un esempio di trasformata discreta nel caso 2-D: un **impulso** approssimato da un piccolo cerchio bianco su fondo nero, in un'immagine di circa 200 x 200 pixels. I differenti livelli di grigio nell'immagine di intensità dello *spettro* evidenziano le ampiezze decrescenti dei diversi lobi.

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

Range dinamico

Quando si visualizza lo spettro di Fourier come immagine di intensità, esso manifesta in genere una dinamica molto più grande di quella riproducibile su un tipico display, per cui solo le parti più luminose dello spettro risultano visibili.

Per esempio, lo spettro dell'immagine di ***Lena*** varia tra 0 (circa) e 6.47×10^6. Effettuando la normalizzazione necessaria per visualizzarlo con L=256 livelli di grigio, solo pochissime parti molto luminose sono visibili.

A ciò si può ovviare, come è noto, mediante una *compressione* di tipo logaritmico, visualizzando, invece che lo spettro, una funzione del tipo:

$$D(u,v)=c \log(1+ |F(u,v)|)$$

c è una costante di scala, che va scelta opportunamente per far ricadere i valori trasformati nel range voluto, cioè in $[0, L-1]$

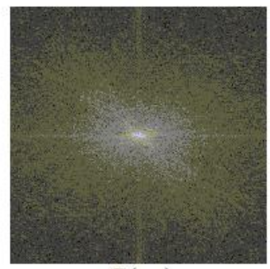
Range dinamico

Poiché $0 < |F(u,v)| < R = 6.47\text{x}10^6$, si ha $0 < D(u,v) < c\log(1+R)$. Dato che $R>>1$, come peraltro avviene normalmente per lo spettro di Fourier di una immagine, si può porre $c \log R = L-1$, da cui $c = (L-1)/\log R = 255/\log(6.47\text{x}10^6) = 16.26$

Pertanto $D(u,v)$ ha tutti i valori nell'intervallo [0, 255], e ciò consente la visualizzazione di molti più dettagli.

$f(x,y)$

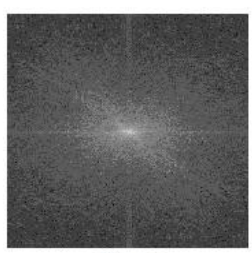
$|F(u,v)|$



$D(u,v)$

Esempi

$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

$\Phi\ (u,v)$

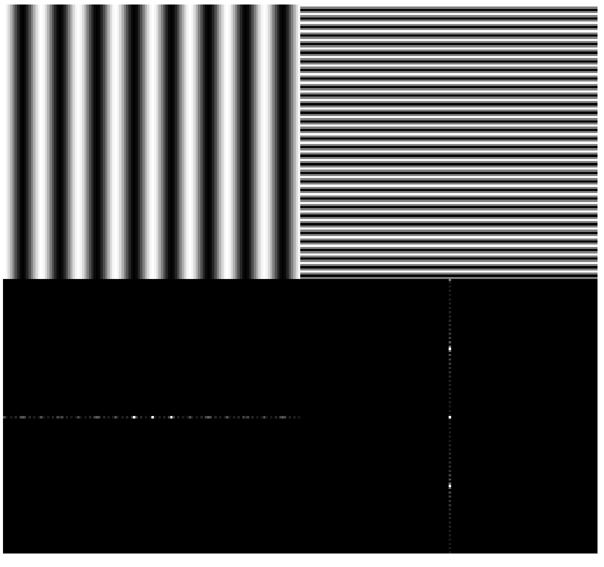
Un esempio di trasformata di immagine reale (256x256 pixel, 256 livelli). L'informazione associata alla fase è in realtà molto più importante di quanto non appaia da questo esempio. Nello spazio di Fourier è come se l'immagine fosse osservata da un differente punto di vista: ogni punto nel dominio trasformato contiene due pezzi di informazione, uno relativo alla ampiezza e uno relativo alla fase di una struttura periodica. La fase contiene l'informazione essenziale per la struttura dell'immagine, quella cioè relativa al **dove** le strutture periodiche evidenziate nella DFT sono collocate. L'ampiezza, invece, contiene solo l'informazione relativa al fatto che una certa struttura periodica è presente nell'immagine. La visualizzazione dello spettro riguarda in realtà una versione compressa logaritmicamente di $|F(u,v)|$.

Trasformate di Fourier: vantaggi

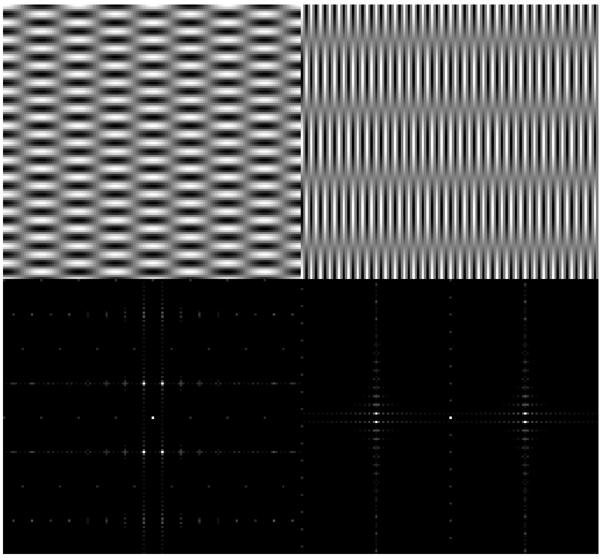
- Che vantaggio si può ottenere dalla trasformata di Fourier?

- Nello spazio delle frequenze è possibile:
  - ✓ sopprimere frequenze indesiderate
  - ✓ ridurre lo spazio occupato dai dati pur limitando la degenerazione del segnale (JPEG, MPEG, DivX, MP3)
  - ✓ rigenerare segnali degradati

Esempi sulle Immagini (1)



Esempi sulle Immagini (2)



Discussioni

La trasformazione diretta può essere vista come un processo di **analisi**: il segnale $f(x)$ viene scomposto nelle sue componenti elementari, che sono nella forma dei **vettori di base**. I coefficienti della trasformata specificano quanto di ogni componente di base è presente nel segnale.

Nella trasformazione inversa, mediante un processo di **sintesi**, il segnale viene ricostruito, come somma pesata delle componenti di base: il peso di ogni vettore di base nella ricostruzione del segnale è rappresentato dal corrispondente coefficiente della trasformata.

Il coefficiente della trasformata è una misura della correlazione tra il segnale ed il corrispondente vettore di base. La trasformazione non comporta perdita di informazione: essa fornisce solo una rappresentazione alternativa del segnale originale.

Trasformate

Oltre a quella di Fourier, diverse trasformate utilizzate nell’image processing, con largo impiego nel restauro e, soprattutto, nella compressione, appartengono alla classe delle trasformate **unitarie**. Fra queste ricordiamo:

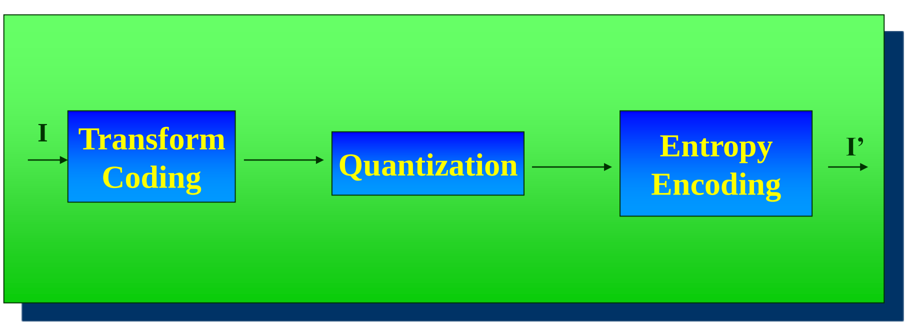
La trasformata discreta di Walsh (DWT)

La trasformata discreta di Hadamard (DHT)

La trasformata discreta del Coseno (DCT)

La trasformata discreta di Karhunen Loeve (KLT)

Un tipico sistema di compressione



- La compressione si realizza principalmente nel processo di quantizzazione.
- La compressione si basa tipicamente su un codificatore entropico che tipicamente si basa su tecniche di run-length coding combinate con codici di Huffman.

Trasformata DCT

Un esempio di trasformata molto utilizzata in compressione è la DCT (Discrete Cosine Transform)

$$F(u,v)=\frac{1}{4}C(u)C(v)\left[\sum_{x=0}^{7}\sum_{y=0}^{7} f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{16}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right]$$

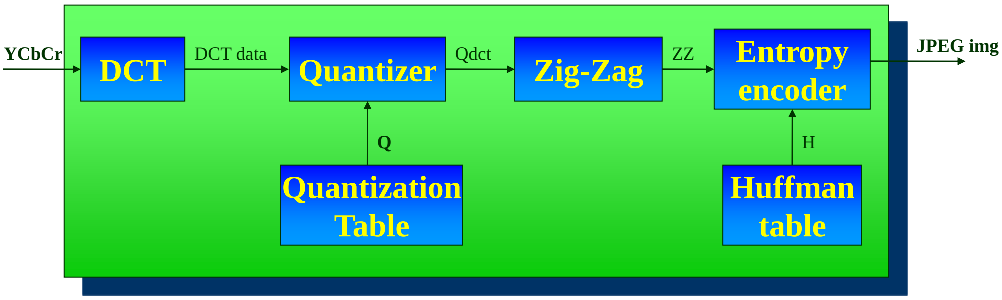
$$f(x,y)=\frac{1}{4}\left[\sum_{u=0}^{7}\sum_{v=0}^{7} C(u)C(v)F(u,v)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{16}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right]$$

dove :

$$C(u),C(v)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad per\ u,v=0;$$

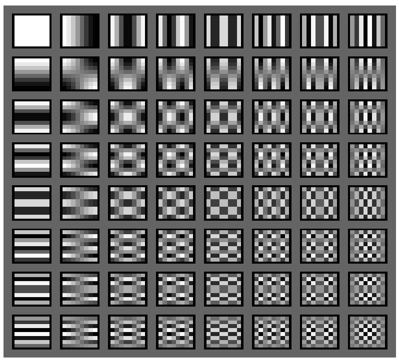
$$C(u),C(v)=1 \quad altrimenti$$

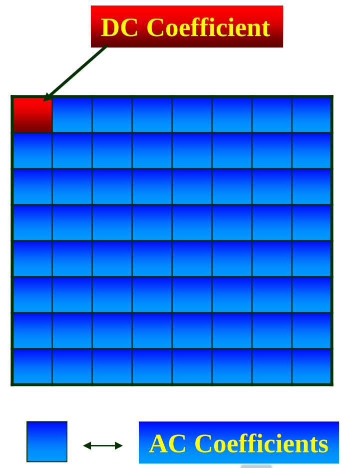
JPEG



DCT

Le 64 (8 x 8) funzioni di base della DCT

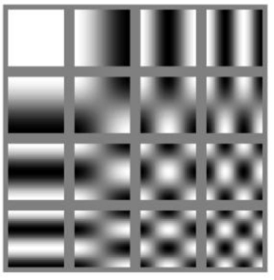




Esercizio

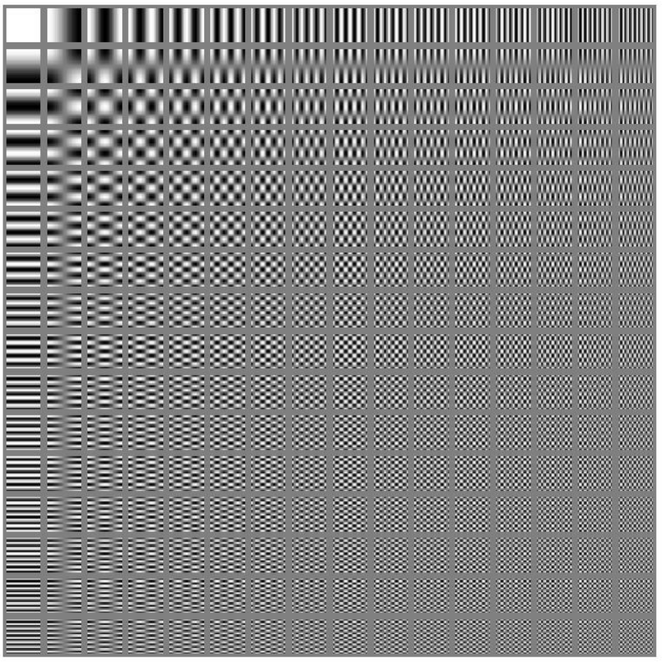
Scrivere uno script Matlab che visualizzi le basi della DCT al variare della dimensione dell'input (2^K*2^k)

Output



K=2

K=4



Matlab (1/2)

```
n=2^k;             %k=2,3,4,5
n1=n-1;            %massimo indice di n valori (da 0 a n-1)
n2=n*2;
arrayOut=(0:n1)
prec=32;
arrayIn=(0:(prec-1));%lato della griglia per un elemento della base

pp2=pi/prec/2;       %valore   premoltiplicato   per   velocizzare   i
calcoli

ks = num2str(k)
bigbase=zeros((prec+2*border)*n);
for r=arrayOut        %per ogni riga
        for c=arrayOut  %e per ogni colonna della base
              a=cos((2*arrayIn+1)*c*pp2);
              b=cos((2*arrayIn+1)*r*pp2);
              [x, y] = meshgrid (a, b);
              blocco = y.*x;
              …
```

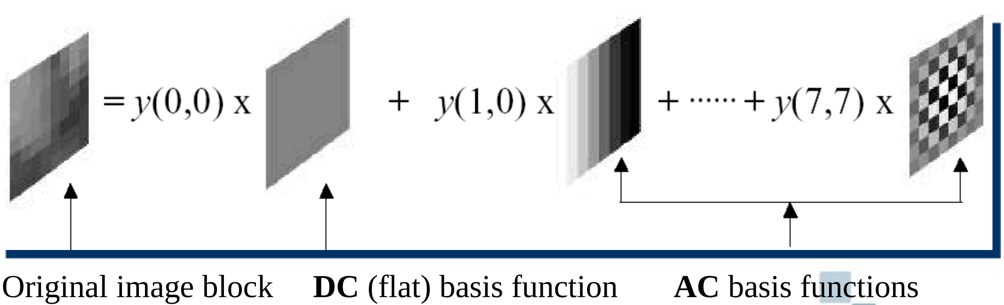
Matlab (2/2)

```
                yFrom=(prec+2*border)*r+1+border;
                yTo=yFrom+prec-1;
                xFrom=(prec+2*border)*c+1+border;
                xTo=xFrom+prec-1;

                bigbase ((yFrom:yTo), (xFrom:xTo)) = blocco;
end
    end
figure ('Name', ['Basi per k = ' ks]);
imshow (bigbase/2+0.5);%rescala in 0..1
print ('-dpng', ['output_k-' ks '.png']);
```

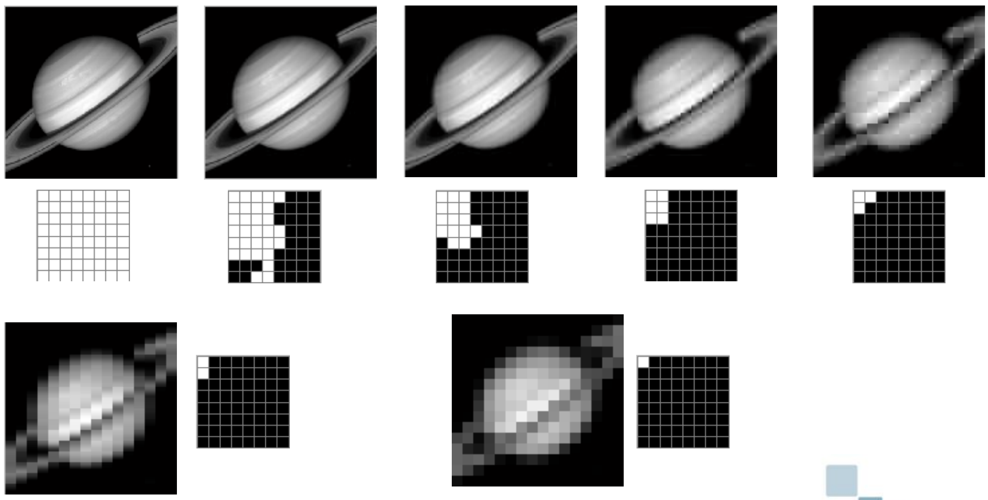

Immagini vs. DCT

I coefficienti DCT possono essere visti come dei “pesi” associati a opportune funzioni periodiche che formano una base nello spazio delle frequenze e permettono di ricostruire così il segnale spaziale, lavorando su blocchi 8x8:



Multimedia – Prof. S. Battiato

DCT example



DCT Quantization

- I coefficienti DCT sono quantizzati ad un numero limitato di livelli.
- La quantizzazione è necessaria per ridurre il numero di bit per campione.

Example:

101000 = 40 (6 bits precision) → Truncates to 4 bits = 1000 = 8 (4 bits precision).

i.e. 40/5 = 8, there is a constant N=5, or the *quantization or quality factor* .

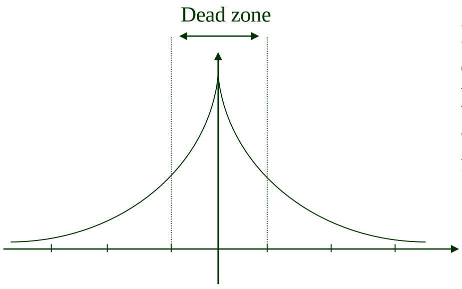
Formula:

$$F(u, v) = \text{round}[\, F(u, v) / Q(u, v)]$$

– Q(u, v) = constant => Uniform Quantization.

– Q(u, v) = variable => Non-uniform Quantization.

Quantization step



It is possible to approximate the statistical distribution of the AC DCT coefficients, both luminance and chrominance components, of a 8x8 block, by a Laplacian distribution in the following way:

$$p_i(x) = \lambda_i / 2 \; e^{-\lambda_i |x|} \qquad i = 1, 2, ..., 64;$$

where:

$\lambda_i = sqrt(2)/\sigma_i$;

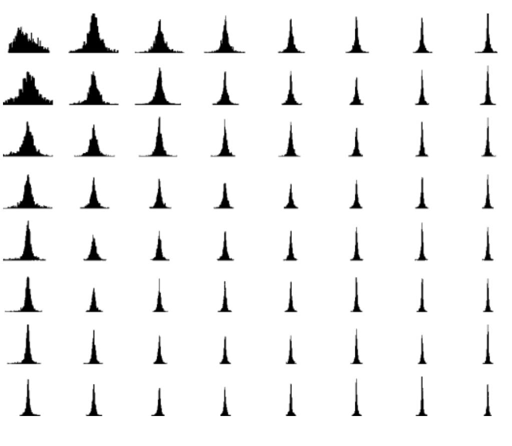
σ_i = i-th DCT standard deviation;

EXAMPLE:

Q(u,v)= 8; Quantization Step

Round(256/8)= 32 Intervals;

[0, 8, 16, 24, 32, 40, ..., 256] - Reconstruction Levels



Edmund Y. Lam, , Joseph W. Goodman - ***A Mathematical Analysis of the DCT Coefficient Distributions for Images***– IEEE Trans. On Image Processing, Vol.9, No. 10, 2000

Esercizio: Verificarlo sul dataset KODAK in Matlab (Che succede su immagini TEXT?)

Standard Q-tables

L'occhio umano è più sensibile alle basse frequenze (upper left corner) mentre lo è meno reispetto alle alte frequenze (lower right corner)

Luminance Quantization Table

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

Chrominance Quantization Table

17	18	24	47	99	99	99	99
18	21	26	66	99	99	99	99
24	26	56	99	99	99	99	99
47	66	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99
99	99	99	99	99	99	99	99

I numeri delle tabelle possono essere scalati positivamente (o negativamente) attravero il cosiddetto **Quality Factor QF.** (i.e. *Q*(u,v)= QF x Q(u,v))*

Tabelle di quantizzazione non standard possono essere specificate nell'header

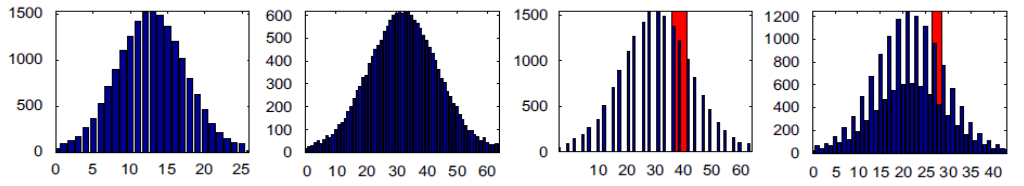
Quantized DCT

$$X = \begin{bmatrix} 168 & 161 & 161 & 150 & 154 & 168 & 164 & 154 \\ 171 & 154 & 161 & 150 & 157 & 171 & 150 & 164 \\ 171 & 168 & 147 & 164 & 164 & 161 & 143 & 154 \\ 164 & 171 & 154 & 161 & 157 & 157 & 147 & 132 \\ 161 & 161 & 157 & 154 & 143 & 161 & 154 & 132 \\ 164 & 161 & 161 & 154 & 150 & 157 & 154 & 140 \\ 161 & 168 & 157 & 154 & 161 & 140 & 140 & 132 \\ 154 & 161 & 157 & 150 & 140 & 132 & 136 & 128 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 214 & 49 & -3 & 20 & -10 & -1 & 1 & -6 \\ 34 & -25 & 11 & 13 & 5 & -3 & 15 & -6 \\ -6 & -4 & 8 & -9 & 3 & -3 & 5 & 10 \\ 8 & -10 & 4 & 4 & -15 & 10 & 6 & 6 \\ -12 & 5 & -1 & -2 & -15 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 9 & -8 & 3 & 4 & -7 & -14 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 1 & 3 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 13 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$z_{ij} = round(\, y_{ij} / q_{ij} \,)$$

Periodic artifact introduced by Double JPEG quantizations (1)

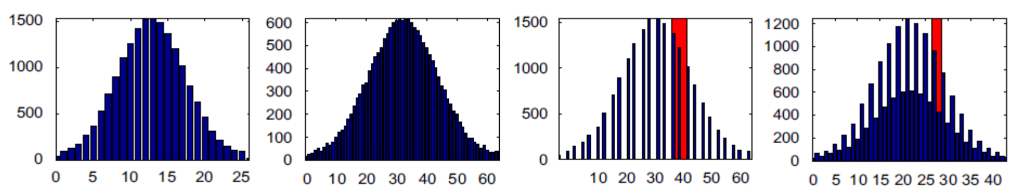


The histograms of double quantized DCT coefficients have some unique properties that can be utilized for forgery detection.

The number $n(u_2)$ of the original histogram bins contributing to a specific bin u_2 in the double quantized histogram h_2 depends on u_2. Note that $n(u_2)$ is a periodic function, with a period $p = q_1/gcd(q_1, q_2)$ with q_1, q_2 quantization coefficients relative to the first and the second JPEG compression.

A. C. Popescu and H. Farid, Statistical tools for digital forensics, in Proc. 6th Int. Workshop Information Hiding, Berlin, Germany, 2004, pp. 128–147, Springer-Verlag.

Periodic artifact introduced by Double JPEG quantizations (2)

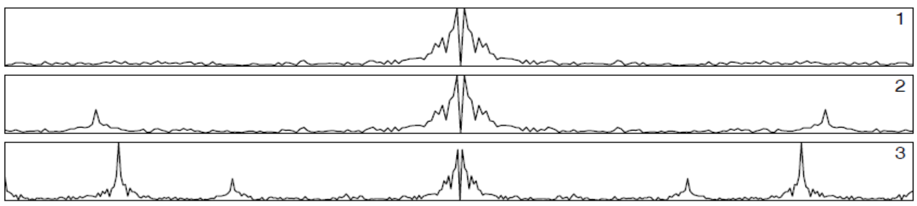


It is worth noting that if $q_2<q_1$, then $n(u_2)$ =0 for some u_2, hence the histogram after double quantization can have periodically missing values. On the contrary, if $q_2>q_1$ the histogram can show some periodic pattern of peaks and valleys.

A. C. Popescu and H. Farid, Statistical tools for digital forensics, in Proc. 6th Int. Workshop Information Hiding, Berlin, Germany, 2004, pp. 128–147, Springer-Verlag.

Multimedia – Prof. S. Battiato

Periodic artifact introduced by Double JPEG quantizations (3)



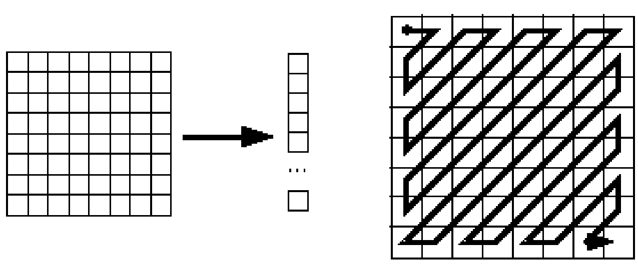
Fourier Transforms of three histograms corresponding to:

1. single JPEG compression with quality 75;
2. double JPEG compression with quality 85 followed by 75;
3. double JPEG compression with quality 75 followed by 85.

These periodic artifacts are visible in the Fourier domain as strong peaks in medium and high frequencies (Popescu el al.).

A. C. Popescu and H. Farid, Statistical tools for digital forensics, in Proc. 6th Int. Workshop Information Hiding, Berlin, Germany, 2004, pp. 128–147, Springer-Verlag.

Zig-Zag Ordering



Dopo la fase di quantizzazione viene separato il coefficiente DC dai coefficienti AC che invece vengono riordinati in un formato 1-D (**8 x 8 a 1 x 64) utilizzando una scansione a zig-zag** utile a generare lunghe “stringhe” (run) di coefficienti nulli.

JPEG Baseline Encoding/Decoding Process

- **Color Transform (RGB → YCbCr);**
- **Image Partition;**
- **Discrete Cosine Transform;**
- **Quantization;**
- **DC Coefficient Encoding;**
- **Zig-zag ordering of AC Coefficients;**
- **Entropy Coding.**

Alcune proprietà della DFT 2-D

Separabilità
Traslazione
Periodicità and Simmetria Coniugata
Valor Medio

Separabilità

La trasformata di Fourier discreta può essere espressa in forma separabile. In particolare vale la seguente espressione:

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} g(x,v) e^{\frac{-i\pi ux}{N}}$$

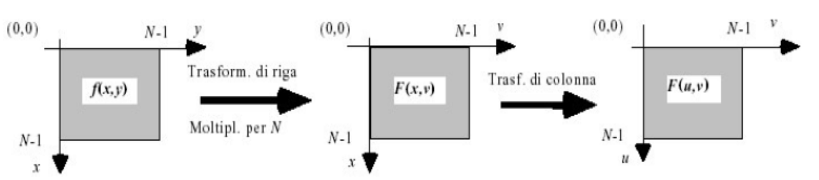
dove: $$g(x,v) = N \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{\frac{-i2\pi vy}{N}} \right]$$

Il principale vantaggio delle proprietà di separabilità è che la $F(u,v)$ può essere ottenuta applicando in due passi successivi la trasformata 1-D.

Separabilità

Per ogni valore di x, l'espressione in parentesi è una trasformata 1-D nel dominio di v (con v= 0, 1, ..., N-1). Pertanto la funzione 2-D $F(x,v)$ è ottenuta effettuando una **trasformata lungo ogni riga** della $f(x,y)$ e moltiplicando il risultato per N;

$F(u,v)$ è a questo punto calcolata effettuando una trasformata lungo ogni colonna di $F(x,v)$;



Lo stesso risultato può essere ottenuto trasformando prima per colonne e poi per righe. Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per la trasformazione inversa.

Traslazione (1)

E’ possibile dimostrare che:

$$f(x,y)e^{\frac{i2\pi(u_0x+v_0y)}{N}} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{\frac{-i2\pi(ux_0+vy_0)}{N}}$$

Nel caso bidimensionale è utile prima di effettuare la trasformata applicare uno *shift* (***traslazione***) dell’origine nel punto (*N/2, N/2*) cioè nel centro del *rettangolo delle frequenze*. Dalle relazioni di cui sopra ciò si ottiene ponendo $u_0=v_0=N/2$, da cui:

$$\Im[f(x,y)-1^{(x+y)}]=F(u-N/2, v-N/2)$$

Traslazione (2)

Si dimostra inoltre che uno *shift* nella $f(x,y)$ non modifica la magnitudo della trasformata (ma non della fase) dato che:

$$\left| F(u,v)e^{\frac{-i2\pi(ux_0+vy_0)}{N}} \right| = |F(u,v)|$$

Queste proprietà vengono utilizzate per una migliore visualizzazione dello spettro.

(In MATLAB ciò viene realizzato dalla funzione `fftshift`)

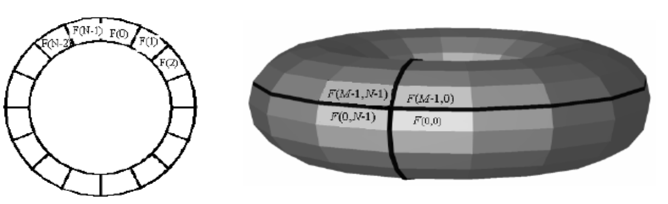
Periodicità e Simmetria Coniugata

La trasformata discreta DFT e la sua inversa sono periodiche (con periodo *N*):

$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$

Questo significa che benché nella definizione della DFT ci si limiti a considerare vettori di dimensione *N*, in realtà si potrebbero calcolare trasformazioni dirette e inverse senza restrizioni nei valori dell'indice, che darebbero luogo a campioni di uguale valore ad ogni intervallo pari a *N*.

Periodicità e Simmetria Coniugata



La periodicità della DFT dà luogo ad una interessante interpretazione geometrica. Nel caso 1-D, il campione $F(N) = F(0)$ è ovviamente contiguo a $F(N\text{-}1)$. I campioni possono quindi essere pensati calcolati per valori disposti non su una linea retta ma su un cerchio, il cosiddetto **anello di Fourier**. Nel caso 2-D, la matrice rappresentativa dell'immagine è proiettata sul cosiddetto **toro di Fourier.** Anche se la $F(u,v)$ si ripete infinite volte, solo gli MxN valori compresi in un solo periodo sono necessari per ottenere $f(x,y)$ da $F(u,v)$. Quindi solo un periodo della trasformata è necessario per specificare completamente $F(u,v)$ nel dominio delle frequenze.

Periodicità e Simmetria Coniugata

➢Se $f(x)$ è reale, $F(u)$ è inoltre dotata di simmetria coniugata:

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$
$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

essendo $F^*(u)$ la complessa coniugata di $F(u)$.

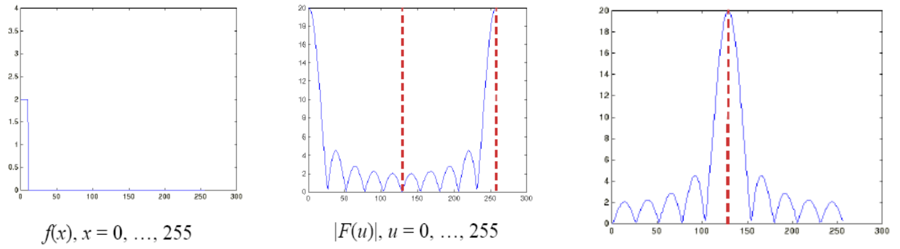
➢La proprietà di periodicità indica che $F(u)$ ha un periodo pari a N, e la proprietà di simmetria mostra che il modulo della DFT è centrato nell'origine:

$$F(u) = F(u+N)$$
$$|F(u)| = |F(-u)|$$

Periodicità e Simmetria Coniugata

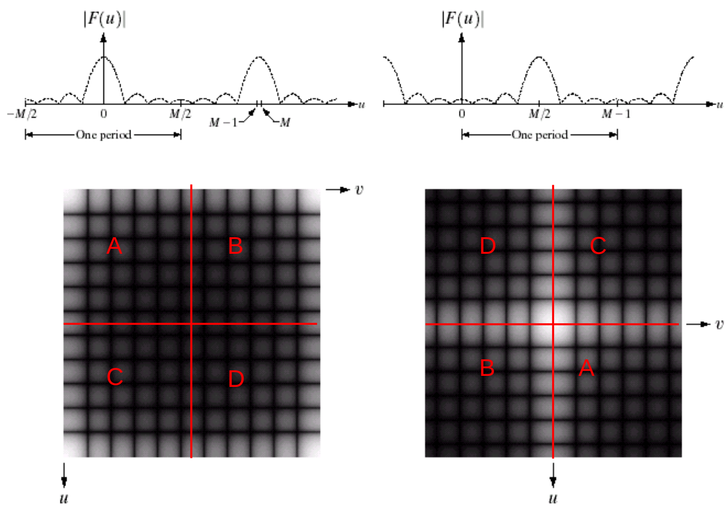
➢Pertanto nell'intervallo [0, N-1] sono in realtà presenti due semiperiodi della trasformata, costituiti, rispettivamente, dai campioni da 0 a N/2, e dalla replica degli N/2 campioni presenti nel semiperiodo a sinistra dell'origine.

➢Per visualizzare un intero periodo basta spostare l'origine dell'asse u nel punto $u=N/2$. A tal fine si può sfruttare la proprietà di traslazione, e quindi basta moltiplicare la $f(x)$ per $(-1)^x$ prima della trasformazione, come visto in precedenza:

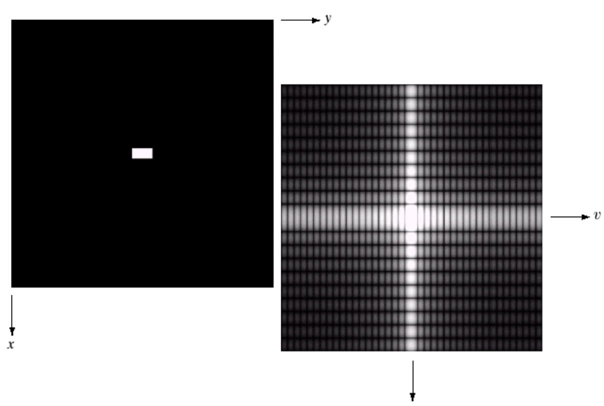


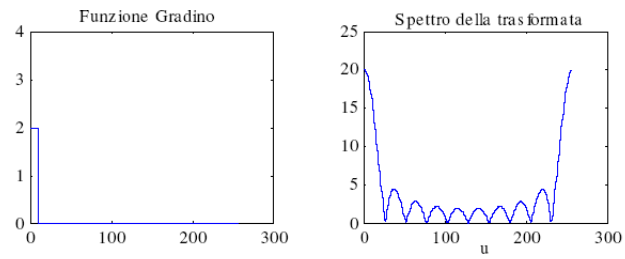
$f(x)$, $x = 0, \ldots, 255$

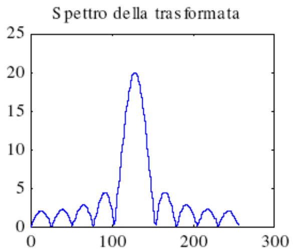
$|F(u)|$, $u = 0, \ldots, 255$



La trasformata di un piccolo rettangolo bianco su uno sfondo nero sarà dunque (dopo lo *shift)*








```
>y=zeros(256,1);
>y(1:20)= 2.;
>subplot(2,2,1),plot(y),ylim([0,4] );
>yy=fft(y,256);
>subplot(2,2,2),plot(abs(yy)),ylim([0 25]);
>yy=fftshift(yy);
>subplot(2,2,3),plot(abs(yy)),ylim([0 25]);
```


Valor Medio

Il valore della trasformata nell'origine, cioè nel punto $(u,v)=(0,0)$ è dato da:

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad \bar{f}(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)$$

Il valore della trasformata di Fourier di un'immagine $f(x)$ nell'origine è uguale alla media dei valori di grigio contenuti nell'immagine (a meno di un fattore di proporzionalità N)

F(0,0) prende anche il nome di *componente continua* o componente DC.

Fast Fourier Transform

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-i2\pi ux / N]$$

- Nella sua forma classica implementare la trasformata di Fourier richiederebbe un numero di operazioni proporzionale a N^2 (N moltiplicazioni complesse e N-1 addizioni per ciascuno degli N valori di u).
- Utilizzando opportune tecniche di decomposizione è possibile abbassare la complessità a $N\log_2 N$, implementando la cosiddetta Fast Fourier Trasform (FFT).