CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica (Vecchio Ordinamento)

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 19/3/2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & h+1 & 0 \\ 0 & h+1 & h+1 \\ 1 & 1 & h \\ 1 & h+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h, determinando, in ogni caso, una base del nucleo e dell'immagine.

2) Determinare eventuali valori di h per cui $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$, dove $v_1 = (0, -1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, -3, 1)$.

3) Detta $p\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $p(x, y, z, t) = (x, y, z)$, determinare $\varphi = p \circ f$. Determinare il valore di h per cui φ abbia l'autovalore 2. Dire se in tal caso φ è semplice e determinarne gli autospazi.

II

Provare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica e determinare il complemento ortogonale del sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$, secondo tale prodotto scalare.

III

1) Determinare equazioni della retta r del piano $z = 0$, incidente la retta $s: x-z-2 = y-z+1 = 0$ e perpendicolare alla retta $t: x - 2z = y - 3z = 0$.

2) Determinare il fascio di parabole aventi r come asse di simmetria e passanti per il punto $P(-1, 1, 0)$.

3) Dette Γ la parabola di tale fascio passante per $Q(0, 1, 0)$, determinare il suo fuoco, la sua direttrice ed una sua equazione canonica.

4) Determinare e studiare il luogo delle rette passanti per O, che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con la retta $2x - y = x - z = 0$.

CORSI DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica
(Vecchio Ordinamento)

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 18/6/2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ sono assegnati il sottoinsieme $T = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = x + z - 1 = 0\big\}$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 1-h \\ 0 & 0 & 1-h & 1+h \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

1) Determinare, al variare di h, $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Calcolare i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^4$ generati, rispettivamente, da T e da $f(T)$. Verificare che $V = W$.
3) Posto $V = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\big\}$, verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $g\colon V \to V$ che non dipende da h. Verificare che g è autoaggiunto rispetto al prodotto saclare indotto su V da quello di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base ortogonale di autovettori.
4) Verificare che f è autoaggiunto e calcolare una base ortogonale di autovettori.
5) Determinare il generico endomorfismo $\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\psi = V$. Verificare che $\psi^2 = 0$.

II

1) Determinare il fascio Φ di coniche che sono simmetriche rispetto all'asse $\vec{x}$, sono tangenti all'asse $\vec{y}$ e passano per il punto $(2, 1, 0)$.
2) Studiare il fascio Φ, determinando, in particolare, le coniche spezzate ed i punti base.
3) Detta γ l'iperbole equilatera di Φ, determinare il centro, gli assi ed i fuochi di γ.
4) Date le rette $r)\, x - y = z - 1 = 0$ ed $s)\, x + y = x + z = 0$, determinare e studiare il luogo delle rette che sono incidenti r ed s e formano un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica
(Vecchio Ordinamento)

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 9 Luglio 2002

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i sottospazi $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = 0\}$, $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\}$ e l'endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato, rispetto alle basi canoniche, alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & h-1 & -h-1 \\ -2 & 3 & h-1 & -h-1 \\ -2 & 2 & h & -h-1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

1) Studiare, al variare di h, l'endomorfismo φ. Per $h = 0$ determinare la controimmagine del vettore $(1,1,1,1)$.

2) Verificare che le restrizioni di φ a V ed a W inducono due endomorfismi $f\colon V \to V$ e $g\colon W \to W$, che sono semplici e determinare una base di autovettori per ciascuno di essi.

3) Verificare che φ è semplice e trovare una base di autovettori. Determinare i valori di h per cui φ ammette due soli autospazi e determinarli.

II

Nello spazio sono assegnati il punto $A(-2,0,0)$ e la retta r di equazione $x - y = z = 0$.

1) Determinare le rette passanti per A, ortogonali ad r, che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$.

2) Determinare la parabola γ avente r come asse e tangente in A alla retta $x - 3y + 2 = z = 0$.

3) Calcolare le equazioni del cono e del cilindro, contenenti γ, di vertici $V(0,0,1,1)$ e $V'(0,0,1,0)$.

CORSI DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica
(Vecchio Ordinamento)
Edile-Architettura

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 24 Settembre 2002

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$, sia f l'endomorfismo definito dalle relazioni:

$$\begin{array}{lcl} f(0,0,1,1) & = & (h,-1,1,2) \\ f(-1,1,0,0) & = & (0,h-1,1,1-h) \\ f(1,0,0,1) & = & (0,-h,0,h+1) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,0,1) \end{array}$$

e sia U lo spazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,-1)$, $u_3 = (0,0,1,-\rho)$, $u_4 = (2,3,1,-\rho-3)$.

1) Studiare f al variare di h in $\mathbb{R}$.

2) Determinare per quale valore di $\rho \in \mathbb{R}$ la restrizione di f a U induce un endomorfismo, e verificare, al variare di h, quando esso è semplice.

3) Sia $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = hz + t = 0\}$. Determinare il generico endomorfismo g di $\mathbb{R}^4$ per cui $g(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$ e $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g = V^\perp$. Si verifichi che g non è semplice, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

II

Si considerino i due punti $A(0,0,1)$ e $B(1,-1,2)$ nello spazio.

1) Determinare equazioni della circonferenza γ passante per l'origine O per A e per B.

2) Determinare equazioni della parabola δ passante per O, A, B ed avente asse parallelo alla retta $z = x + y = 0$.

3) Si studi il fascio di coniche Φ individuato da γ e δ.

4) Determinare l'equazione del cono contenente γ con vertice in $V(1,1,1)$.

CdL in Ingegneria Edile-Architettura
CdL in Ingegneria Edile e Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 27 Marzo 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 2, 1, 1)$, i sottospazi

$$V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3) \text{ e } W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + ht = 0\}$$

e l'applicazione lineare $f : V \to W$ definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1, 4, 1 + h, 1) \\ f(v_2) &= (h, h, h, 0) \\ f(v_3) &= (0, 4, 2h, 2) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1) Determinare, al variare di h, i sottospazi $V + W$ e $V \cap W$.

2) Studiare f al variare di h.

3) Determinare $\bigcap_{h\in\mathbb{R}} \operatorname{Im} f$.

4) Determinare il valore di h per cui f induce un endomorfismo $f' : V \to V$.

5) Verificare che f' è semplice e trovare una base di autovettori.

6) Definire un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induce f' e che abbia due autospazi di dimensione 2.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}.\vec{y}.\vec{z}$.

1) Detta r la retta di equazioni $x - z = y + z - 1 = 0$ determinare la sua proiezione ortogonale s sul piano $z = 0$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti agli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nei punti in cui essi secano s. In particolare dire se in tale fascio esistono iperboli equilatere o circonferenze.

3) Determinare e studiare il fascio di quadriche contenenti r ed s e tangenti al piano improprio nel punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

CdL in Ingegneria Edile e Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata l' 11 Aprile 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la forma quadratica

$$q(x, y, z, w) = 2x^2 - 2xz + 3y^2 + 2hyz + 2yw + 3z^2 + w^2, \quad h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare una forma canonica di q.

2) Dire per quali valori di h la forma bilineare associata a q definisce un prodotto scalare.

3) Siano $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e sia $V = \mathscr{L}(e_1, e_2)$. Per i suddetti valori di h determinare $V^\perp$, al variare di h.

4) Determinare il valore di h per cui e_1 è ortogonale ad e_2 ed estendere e_1, e_2 ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

II

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (4, 1, -1, 0), v_3 = (2, 1, 0, 1).$$

1) Determinare l'equazione cartesiana di V.

2) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la semplicità dell'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, h, h, h) \\ f(v_2) &= (h + 12, h, h - 8, h - 4) \\ f(v_3) &= (4h - 12, h - 2, 4 - h, 2) \end{aligned}$$

3) Determinare per ogni $h \in \mathbb{R}$ gli autospazi di f.

III

Determinare vertici, assi di simmetria, fuochi, direttrici e tracciare il grafico della conica γ di equazioni

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + x + 13y - 12 = 0, \quad z = 0.$$

Determinare sulla retta di equazioni $x = y = z$ i punti P tali che il triangolo avente come vertici P ed i punti di intersezione di γ con l'asse delle $\vec{x}$, abbia area 1.

CdL in Ingegneria Edile-Architettura
CdL in Ingegneria Edile V.O.
CdL in Ingegneria Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 4 Luglio 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se essa è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice diagonale D simile ad A ed una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$.

II

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori

$$v_1 = (1,1,1,0), v_2 = (0,1,1,0), v_3 = (1,0,1,0)$$

ed i sottospazi $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $W = \{(x,y,z,t) \in V \mid x = y\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo così definito

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2,2,0,0) \\ f(v_2) &= (1,2,-1,0) \\ f(v_3) &= (0,1,-1,0). \end{aligned}$$

1) Studiare f determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Determinare l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $g_{|V} = f$ e $g(0,0,0,1) = (0,1,0,0)$.
3) Studiare la semplicità di g.
4) Determinare $W^{\perp}$.

III

Nello spazio si considerino le rette

$$r : z = x + y - 1 = 0,\ r' : z = x + y + 1 = 0,\ s : y = x + z - 1 = 0,\ s' : y = x + z + 1 = 0.$$

ed i punti $A(1,0,0)$ e $B(-1,0,0)$.

1) Trovare e studiare il fascio delle coniche bitangenti alle rette r e r' in A e B. In particolare, determinare l'iperbole equilatera γ di tale fascio.
2) Trovare l'iperbole equilatera γ' bitangente alle rette s ed s' in A e B.
3) Studiare il fascio di quadriche contenenti γ e γ' e giustificare perché in tale fascio non possono esserci né ellissoidi, né paraboloidi ellittici, né cilindri parabolici o ellittici.

CdL in Ingegneria Edile-Architettura
CdL in Ingegneria Edile V.O.
CdL in Ingegneria Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 12 Settembre 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{R}^4$ è assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle relazioni

$$\begin{array}{lcl} f(1,0,1,0) & = & (2,0,2,0) \\ f(1,0,0,-1) & = & (1,0,1,0) \\ f(1,2,1,0) & = & (2,2,2h,0) \\ f(1,0,0,1) & = & (1,0,1,2h) \end{array}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare di h.
2. Studiare la semplicità di f nel caso $h = -1$.
3. Posto $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0\}$, determinare il valore di h per cui la restrizione φ di f a V sia un endomorfismo di V.
4. Dire se φ è semplice, determinando in caso affermativo una base $\mathscr{A}$ di autovettori di V e la matrice $\mathfrak{M}^{\mathscr{A},\mathscr{A}}(\varphi)$.
5. Determinare $V^{\perp}$ ed una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ contenente una base di V.

II

1. Nello spazio determinare equazioni della retta r passante per l'origine, perpendicolare ed incidente la retta di equazioni $2x + y - 6 = x - z = 0$.
2. Determinare e studiare la quadrica Q luogo delle rette che passano per l'origine e formano con r un angolo di ampiezza $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Determinare e studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$ che passano per l'origine, hanno ivi per tangente l'asse $\vec{y}$ e passano inoltre per i punti $(1,-1,0)$, $(1,2,0)$.
4. Detta p la parabola di Φ, determinare le quadriche che contengono p, la retta r, la retta s di equazioni $x + y = x - z = 0$ ed il punto $A(0,0,1)$.

CdL in Ingegneria Edile-Architettura
CdL in Ingegneria Edile V.O.
CdL in Ingegneria Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 30 Settembre 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0\}$ e l'endomorfismo $f : V \to V$ così definito

$$\begin{array}{lcl} f(1,0,-1,0) & = & (1,0,-1,h) \\ f(2,1,0,0) & = & (5,4,3,0) \\ f(1,1,1,1) & = & (4+h,4,4-h,2). \end{array}$$

1. Studiare f al variare del parametro reale h.
2. Nel caso $h = 0$ verificare che f è semplice e determinare una base di autovettori.
3. Nel caso $h = 0$ determinare l'endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, estensione di f, tale che $g(1,1,0,0) = (3,3,2,0)$.
4. Determinare la matrice associata a g rispetto alle basi canoniche.
5. Verificare che g è semplice e determinare una base di autovettori di g.

II

Nello spazio è assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}.\vec{y}.\vec{z}$.

1. Studiare il fascio di coniche Φ di equazione $z = (\lambda + \mu)x^2 - \mu y^2 - \lambda y - \mu = 0$ determinando, in particolare, i punti base e le coniche spezzate del fascio.
2. Determinare il cono Q che ha vertice nel punto $(0,0,1)$ e come direttrice l'iperbole equilatera del fascio Φ.
3. Determinare e studiare le quadriche che contengono la parabola di Φ, sono tangenti in O al piano $y = 0$ ed hanno come conica all'infinito $t = x^2 - hxz + hyz - z^2 = 0$.

CdL in Ingegneria Edile V.O.
CdL in Ingegneria Informatica V.O.

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 13 Dicembre 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo così definito

$$f(x, y, z) = \big(x + (1 - h^2)y + (h^3 - h)z, hy, (h^2 - 1)y + (2 - h^2)z\big),$$

con h parametro reale.

1. Studiare f determinando nucleo ed immagine al variare di h.
2. Determinare $\bigcap_h \operatorname{Im} f$.
3. Studiare la semplicità di f, al variare di h e trovare gli autospazi nel caso in cui ve ne sia uno di dimensione maggiore di uno.
4. Posto $V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\big\}$, determinare il valore di h per cui f induce un endomorfismo su V.
5. Detta A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, verificare che essa definisce un prodotto scalare solo nel caso in cui tale prodotto scalare è quello euclideo.
6. Determinare $V^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo.

II

1. Determinare nello spazio l'equazione della parabola Γ passante per $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$ e $B(1, -1, 2)$. ed avente asse parallelo alla retta di equazioni $z = x + y = 0$.
2. Determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per O, A, B.
3. Studiare il fascio di coniche Φ individuato da $\mathcal{C}$ e Γ.
4. Studiare il fascio di quadriche contenente Γ e la sua proiezione ortogonale Γ' sul piano $y = 0$.