Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica

Prova di **Algebra lineare e Geometria** – Appello del 23 gennaio 2023

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-h+3)\,x - 3\,y + z - t \\ 2\,y \\ -7\,y - z + 13\,t \\ (-h+2)\,t \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare f, al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$ e le loro equazioni cartesiane.

2) Nel caso $h = 0$ diagonalizzare la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

II

1) È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Siano dati i tre piani:

$$\Pi_1 : x - y + z = 1, \qquad \Pi_2 : x + 3y + 2z = -2, \qquad \pi : x + y - z = 3.$$

Determinare l'equazione del piano α passante per il punto $(0, 0, 1)$, ortogonale al piano π, e parallelo alla retta $r : \Pi_1 \cap \Pi_2$.

2) È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y},$. Riconoscere la conica di equazione:

$$C_k : k\,x^2 - k\,y^2 + 4xy - 2x + (2-2k)y - 1 = 0,$$

al variare del parametro k, specificando in particolare i valori del parametro per i quali si ottengono coniche riducibili o irriducibili, reali o immaginarie.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 16 febbraio 2023

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1,1,h,h),\ v_2 = (h,h,1,1),\ v_3 = (1,1,1,h+1).$$

Calcolare la dimensione ed una base di V al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Nel caso $h = 2$ si consideri l'endomorfismo $V \xrightarrow{f} V$ definito dalle assegnazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_2 \\ f(v_2) &= 2v_3 \\ f(v_3) &= v_2 + v_3 \end{aligned}$$

Calcolare, se possibile, una base di autovettori di V.

II

1) Si consideri la parabola p di equazione $x^2 - 2y = 0$. Calcolare la conica simmetrica a p rispetto alla retta tangente a p in $A(2,2)$.

2) Scrivere l'equazione della sfera tangente in $O(0,0,0)$ al piano $x + 2y + z = 0$ e passante per $P(1,0,0)$.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova di **Algebra Lineare e Geometria** – Appello del 24 febbraio 2023

Appello riservato a studenti che avrebbero dovuto sostenere l'esame in anni di corso precedenti (Art. 16 comma 5 bis)

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Per $h \in \mathbb{R}$, consideriamo l'endomorfismo $f_h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 7\,y + z \\ x + y + z \\ -x + (h-1)\,y + (h-1)\,z \end{pmatrix}$$

Studiare la semplicità di f_h al variare di h.

2) Trovare equazioni cartesiane dell'immagine di f_h al variare di h.

II

1) Riconoscere al variare del parametro reale h la seguente conica di equazione:

$$C_h : h\,x^2 - 2\,x\,y - h\,y^2 + 2\,x - 2\,y - h = 0,$$

specificando in particolare i valori del parametro per i quali si ottengono coniche riducibili o irriducibili, reali o immaginarie.

2) Per $h = 0$, trovare eventuali assi di simmetria della conica C_0 e disegnarla.

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 15 marzo 2023

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1,0,0,-1),\ v_2 = (0,1,0,-1),\ v_3 = (0,0,1,-1).$$

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $V \xrightarrow{f} V$ definito dalle assegnazioni

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1-h)v_1 + hv_2 \\ f(v_2) &= v_3 \\ f(v_3) &= v_1 \end{aligned}$$

al variare del parametro reale h.

2) Sia $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = 0, z+t = 0\}$. Studiare l'applicazione lineare $W \xrightarrow{g} V$, restrizione di f a W.

II

1) Scrivere l'equazione della parabola γ avente vertice $V(1,1)$ e direttrice $r:\ x+y+1=0$.

2) Scrivere le equazioni delle circonferenze di raggio 1, tangenti a γ in V.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica

Prova di **Algebra Lineare e Geometria** – Appello dell' 8 maggio 2023

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & h & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si stabilisca se A è diagonalizzabile e, quando esiste, si esibisca una matrice diagonale simile ad A.

2. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, trovare equazioni cartesiane per l'immagine dell'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\underline{x} \mapsto A\,\underline{x}$.

I

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ con coordinate x, y, z consideriamo le due rette L_1 e L_2, dove L_1 ha equazioni cartesiane:
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + z = -1, \end{cases}$$
e L_2 è la retta passante per i punti $P_1 = (1, 1, 1)$ e $P_2 = (1, 3, 0)$. Verificare che L_1 e L_2 sono sghembe e trovare tutte le rette passanti per l'origine $O = (0, 0, 0)$ e incidenti L_1 e L_2.

2. Al variare del parametro reale h, riconoscere la sequente conica:
$$C_h = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2(h - 1/3)xy + y^2 - 2y + 1 = 0 \}.$$
(Più precisamente, stabilire al variare di h se C_h è una ellisse, una circonferenza, una iperbole, una iperbole equilatera, o una parabola; inoltre stabilire quando C_h è riducibile o irriducibile e quando è reale o immaginaria.)

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 27 giugno 2023

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.

I

1) Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (h, 0, 1, -1),\ v_2 = (2, h, 3, -1),\ v_3 = (1, 2, 3, h),\ v_4 = (0, 1, 1, 1).$$

Calcolare, al variare di h, l'immagine dell'applicazione lineare $V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, definita dalla legge

$$f(x, y, z, t) = (x + y, y + z, x + z, x - y).$$

2) Nel caso $h = 4$, dire se l'endomorfismo $V \xrightarrow{g} V$ definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_2 + 3v_3 - 8v_4 \\ g(v_2) &= 2v_1 + v_2 + 3v_3 \\ g(v_3) &= v_2 + v_3 \end{aligned}$$

è diagonalizzabile. Calcolare gli autospazi.

II

1) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, determinare il centro ed il raggio della circonferenza tangente in $O(0, 0, 0)$ alla retta $x = y = z$ e passante per $A(2, 1, 0)$.

2) Sul piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, tracciare il grafico della conica $\gamma : x^2 + 4xy - 2y^2 - 8x - 4y = 0$.