Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 29 Giugno 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned}&(1,1,0) \in \ker f\\ &(1,0,1) \text{ è autovettore associato all'autovalore } h\\ &f(1,1,1) = (2,1,h).\end{aligned}$$

Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. Dati $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $w_1 = (1,1,0,0)$, $w_2 = (0,1,0,1)$, $w_3 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ e dati i sottospazi V e W di $\mathbb{R}^4$ aventi come basi, rispettivamente $\mathcal{A} = [v_1, v_2, v_3]$ e $\mathcal{B} = [w_1, w_2, w_3]$, si studi al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $g\colon V \to W$ tale che:

$$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ h & 1 & 2 \\ 1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $W \oplus \operatorname{Ker} g = \mathbb{R}^4$.

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $P_1 = (-1,1)$, $P_2 = (1,1)$ e $P_3 = (-1,-1)$ e tangenti in quest'ultimo alla retta di equazione $y + 1 = 0$. Determinare una forma ridotta della conica passante per il punto $P_\infty = (-1,1,0)$.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti la conica

$$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i punti $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (-1,0,1)$. Detto Q il cono appartenente a questo fascio di quadriche, studiare la natura della conica sezione di Q con il piano $\pi\colon x - y - 1 = 0$.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 16 Luglio 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati i vettori $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ e il sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^4$.

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 + hv_2 + v_3 \\ f(v_2) &= 2v_1 - v_2 + v_3 \\ f(v_3) &= -2hv_2 - v_3 \end{aligned}$$

   Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. È dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da:

$$g(x, y, z, t) = (hx + hz - ht, (h-1)y + hz, x - z, (h-1)y),$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcolare $g(V)$ e $g(V) \cap V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinandone in ciascun caso una base. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $g(V) \cap V = \mathcal{L}(v_1, v_2 + v_3)$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono dati il punto $P = (1, 0, 0)$, il piano $\pi\colon x + y = 0$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

   Calcolare la distanza $d(P, r)$, determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a r e la retta s ortogonale a r, parallela al piano π e passante per P.

2. Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le quadriche di equazione:

$$x^2 - 2hxy + 4y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0.$$

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 10 Settembre 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato, al variare di $h \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

   $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} f$
   $(1,1,0)$ è autovettore associato all'autovalore 2
   $f(1,0,1) = (h,0,-h)$.

   Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori per f.

2. Date le basi $\mathcal{A} = [(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)]$ e $\mathcal{B} = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$, rispettivamente, di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, si studi al variare di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

   $$M^{\mathcal{A},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & h & -1 \\ h & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$. Stabilire se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali si abbia $\operatorname{Im} g \oplus \mathcal{L}((0,0,1,1)) = \mathbb{R}^4$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Dati i punti $P = (1,-1,2)$, $P_\infty = (0,1,3,0)$, il piano $\pi\colon x+z=0$ e la retta $r\colon x+1=y-1=0$, determinare:

   (a) le equazioni della retta PP_∞;

   (b) la proiezione ortogonale r' della retta r sul piano π;

   (c) il piano α ortogonale a π, parallelo alla retta PP_∞ e passante per l'origine O.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche tangenti alle rette di equazioni $x+y+1=0$ e $x-y-1=0$ nei punti in cui esse incontrano la retta di equazione $x+2y=0$. Determinare gli asintoti della conica del fascio passante per il punto improprio dell'asse $\vec{y}$.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr) e Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 24 Settembre 2021

Durata della prova: 2 ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnate le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite dalle assegnazioni:

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, hy+(h-2)z, (h+2)y+(h+2)z+ht), \quad \forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,$$

con $h \in \mathbb{R}$, e da:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Detta $\varphi = f \circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, diagonalizzare la matrice $M(\varphi)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ per la quale esiste un valore di $h \in \mathbb{R}$ tale che si abbia:

$$M^{\mathcal{E}_4,\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II

1. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2x - 2y - 4k - 3 = 0,$$

determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Determinare e studiare le quadriche contenenti le coniche di equazioni:

$$\Gamma_1\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 + z^2 - 1 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$