Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr)
Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 14 gennaio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$ e $v_3 = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$ e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. È dato l'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 + 2v_2 \\ f(v_2) &= -kv_1 + kv_2 + 2kv_3 \\ f(v_3) &= v_1 + v_2 - v_3, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f, determinando, in particolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, nucleo e immagine.
2. Dato $u = (1,2,0,3)$, mostrare che $u \in V$ e determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale u è autovettore per f, specificando il valore dell'autovalore associato.
3. Studiare la semplicità di f al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando, se possibile, una base di autovettori nei casi $k = 0$ e $k = 1$.
4. Dato $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 6x - 3y + 4z = 0,\ 9x + 7z - 3t = 0\}$ e $W = \mathscr{L}(v_1, v_2 + v_3)$, determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per il quale $f(W) = U$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Date le rette:

   $$r\colon \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases}$$

   determinare il piano π passante per il punto $P = (6,2,0)$ e parallelo alle rette r e s. Determinare la retta t simmetrica di s rispetto a π.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti $A = (0,1)$, $B = (1,0)$, $C = (1,-1)$ e $D = (-1,1)$.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Data la conica:

   $$\Gamma\colon \begin{cases} x^2 - y^2 - 2xy - 1 = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

   determinare il cono e il cilindro contenenti Γ e aventi vertice, rispettivamente, $V_1 = (1,0,1)$ e $V_2 = (0,1,1,0)$.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr)
Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 29 gennaio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -h & -3 & h+2 & 2-h \\ -h & -2h-1 & h+1 & h+1 \\ -h & 1-h & h & 0 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, in particolare, nucleo e immagine.

2. Siano $v_1 = (1, -1, 1, -2)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)$ e $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. Determinare l'equazione cartesiana di V ed il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $\operatorname{Ker} f \subset V$.

3. Per il valore di h di cui al punto precedente studiare l'applicazione lineare $g = f|_V\colon V \to \mathbb{R}^3$ restrizione di f a V.

4. Diagonalizzare la matrice $M^{\mathscr{A},\mathcal{E}}(g)$, dove $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$.

5. Esercizio facoltativo. Calcolare una matrice associata alla generica applicazione lineare $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi|_V = g$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Sono assegnate le rette:
$$r\colon \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
ed i piani $\alpha\colon y + z + 1 = 0$ e $\beta\colon x + 3y + z = 0$. Determinare le equazioni della retta t incidente le rette r e s e parallela ai piani α e β. Dati i punti $A = (0, 1, 1)$ e $B = (-2, 2, 0)$, determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB e l'equazione del piano parallelo a β e passante per M.

2. Sono assegnati i punti $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (-2, 0, 0)$ e la retta $s\colon x + y = z = 0$. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per O, A e B e tangenti in O alla retta s.

3. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:
$$x^2 + 2y^2 + 2kyz + 2xy + 2z - k = 0.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettronica (Cp-I)
CdL in Ingegneria Informatica (Cp-I)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 14 febbraio 2020

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{3,3}$, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Siano $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ed $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gli endomorfismi le cui matrici associate rispetto alle basi canoniche sono rispettivamente A e B.

1) Calcolare la dimensione ed una base di $\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Im} f_B$.

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla legge

$$f(v) = f_A(v) + h f_B(v), \;\; h \in \mathbb{R}.$$

Studiare f al variare di h.

3) Nel caso $h = 1$, determinare l'applicazione lineare f^{-1}.

4) Dire se f_A è diagonalizzabile.

II

Sia assegnato sullo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare il luogo γ dei punti del piano $z = 0$ equidistanti da $O(0,0,0)$ e dalla retta $r : z = x + 2y + 1 = 0$.

2) Tracciare il grafico di γ.

3) Studiare la quadrica di equazione $h(xy - z) + 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

4) Si consideri la sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2z = 0$ e sia R il suo raggio. Determinare un piano che interseca S in una circonferenza di raggio $\frac{R}{2}$.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr)
Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 11 Settembre 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0)$, la base $\mathscr{A} = [v_1, v_2, v_3]$ di $\mathbb{R}^3$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h+1)v_1 + v_2 - hv_3 \\ f(v_2) &= hv_2 + hv_3 \\ f(v_3) &= 4v_2 + (h+1)v_3, \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $v = (h+1)v_1 + 2v_2 + 3v_3 \notin \operatorname{Im} f$.

2. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale $4v_2 + v_3$ è autovettore per f e, per tale valore di h, diagonalizzare $M^{\mathscr{A}}(f)$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dati il punto $P = (1,0,0)$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = -3, \end{cases}$$

   determinare il piano π passante per P e ortogonale a r e il punto P' simmetrico di P rispetto a r.

2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1,2)$ e $B = (0,1)$ ed ivi tangenti alle rette $s_1\colon x - 1 = 0$ e $s_2\colon y - 1 = 0$. Determinare la natura della conica del fascio passante per il punto improprio $P_\infty = (1,-1,0)$.

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica (Cp-I e J-Pr), Ingegneria Elettronica (Cp-I e J-Pr)

Prova di **Algebra lineare e Geometria**- Appello 25 Settembre 2020

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato allontanarsi prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,0,-1,0)$, lo spazio vettoriale $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e l'endomorfismo $f \colon V \to V$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h, h+1, 0, 1) \\ f(v_2) &= (2, 2, -1, 1) \\ f(v_3) &= (h, h-1, -h, h-1), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$.
2. Determinare i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali 1 è autovalore per f e per tali valori di h studiare la semplicità di f, determinando, ove possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione:

   $$x^2 + (h-2)xy + (h+1)y^2 - hx - hy = 0,$$

   determinandone, in particolare, punti base e coniche spezzate. Determinare il centro di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.
2. Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

   $$x^2 - 2xy - 2xz + hz^2 - 2y + 1 = 0.$$