Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 gennaio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Siano $w_1 = (1,1,1,0,0)$, $w_2 = (0,0,1,1,1)$ e $W = \mathscr{L}(w_1, w_2)$. Determinare un sistema minimale di equazioni omogenee di W come sottospazio di $\mathbb{R}^5$.

2) Sia $V = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x - y - z + t = 0,\ x - y + 2t - 2u = 0\}$. Determinare una base di V che estende una base di W.

3) Determinare gli endomorfismi non iniettivi $f : V \to V$, tali che W sia autospazio associato all'autovalore 3.

4) Calcolare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare
$$g : W \times W \to \mathbb{R}^{2,2}$$
definita dalla legge
$$g(aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) = \begin{pmatrix} a+c & b+hd \\ b+d & a+d \end{pmatrix},\ h \in \mathbb{R}.$$

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare il fascio di quadriche generato da $S: x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ e $Q: x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2) Sia $P_1(1,0,0)$ e $P_2(0,0,1)$. Sia Φ il fascio di piani passanti per la retta P_1P_2. Determinare il raggio della circonferenza $p \cap S$, al variare di $p \in \Phi$.

3) Determinare i punti P del piano $x + y + z = 0$ tali che il triangolo PP_1P_2 abbia area 1.

4) Determinare il triangolo avente un vertice in $A(0,2,0)$, un altro vertice sulla retta $z = x - 2 = 0$ e circoscritto alla circonferenza di equazioni $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 18 Febbraio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, -1, 3, 0)$, $v_3 = (0, 1, 2, 1)$, $v_4 = (2, -2, 5, 3)$.

1) Posto $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, determinare la dimensione di V, una sua base e le sue equazioni cartesiane.

2) Dati $u_1 = (0, 0, 5, 1)$, $u_2 = (0, 1, -3, 0)$, $u_3 = (-1, 0, 8, 0)$ verificare che $\mathcal{A} = [u_1, u_2, u_3]$ è una base di V. Data l' applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (h, 1, h-1) \\ f(u_2) &= (1, -h, 1) \\ f(u_3) &= (0, -h, 0), \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$ studiare f al variare di h determinando in particolare la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$ di V e alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

3) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(2, 3, -1)$.

4) Diagonalizzare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinando la matrice diagonale D e la matrice diagonalizzante P tale che $P^{-1}BP = D$

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la retta

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e $P = (-1, 0, 1)$ determinare il luogo delle rette passanti per P che formano con r un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ passanti per i punti $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$ e $P_\infty = (1, 1, 0)$ e tangenti alla retta $t : \; x - y - 2 = 0$

3) Studiare, al variare del parametro reale h, il fascio θ delle quadriche di equazione

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2hyz - 2z + h = 0.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 aprile 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Sia $M_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $h \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di h per cui M_h è diagonalizzabile sul campo reale e sul campo complesso. Nel caso $h = -5$, determinare una matrice $P \in \mathbb{C}^{2,2}$ tale che $P(M_{-5})P^{-1}$ è diagonale.

2) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ è simile a $T = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Studiare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, definita dalla legge
$$f(x, y, z) = xM_h + yM_0 + zM_1, \;\; h \in \mathbb{R}.$$
Sia $W = \mathscr{L}(M_0^2, M_1^2)$. Dire se la somma $W + \operatorname{Im} f$ è diretta.

4) Sia $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calcolare $f^{-1}(E_{12})$ e $f^{-1}(\mathscr{L}(E_{12}))$. Dire qual è la dimensione di $f^{-1}(\mathscr{L}(E_{12}))$.

II

Sia assegnato sul piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, u$.

1) Scrivere l'equazione della conica γ di eccentricità 2, avente fuoco in $O(0, 0)$ e relativa direttrice $x + y - 1 = 0$.

2) Determinare gli asintoti di γ.

3) Studiare il fascio di coniche $\lambda(x^2 + y^2) + \mu(x + y - 1)^2 = 0$.

4) Sia H il punto generico della retta $x - y = 0$. Determinare la conica γ' simmetrica di γ rispetto al punto H.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 27 giugno 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta. È vietato consultare libri o appunti.

I

E' assegnato l' endomorfismo $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f(1,-1,0,0) &= (1,-1,2-h,h-1) \\ f(1,0,-1,0) &= (0,1,0,2h-1) \\ f(0,1,1,0) &= (1,0,h,-h) \\ f(0,0,0,1) &= (0,0,0,h) \end{aligned}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}^4$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
2) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(2,1,-1,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
3) Posto $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x - z = 0\}$ dire per quale valore di h la restrizione di f a V induce un endomorfismo φ su V.
4) Studiare la semplicitÃă dell'endomorfismo φ. Determinare, ove possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il piano $\pi : x + 2y + z = 0$ e data la retta

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Determinare la retta s simmetrica di r rispetto al piano π.

2) Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangente in $A = (1,0)$ alla retta $r:\ 2x - y - 2 = 0$ e tangente in $B = (-1,0)$ alla retta $s:\ x + 1 = 0$.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, il fascio θ delle quadriche di equazione

$$x^2 + 2hxz - 4yz + 2z + h = 0$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 17 luglio 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

E' data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$\begin{cases} f(1,0,-1) = (h,0,h,-1) \\ f(0,1,-1) = (0,h,-h,h-2) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,0,2) \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare f al variare di h, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Determinare la controimmmagine $f^{-1}(1,1,0,1)$ al variare del parametro h.

3) Si consideri la proiezione $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da $p(x,y,z,t) = (x,y,t)$. Studiare l'endomorfismo $\varphi = p \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al variare di h, determinando in ogni caso $\operatorname{Ker} \varphi$ e $\operatorname{Im} \varphi$.

4) Verificare che 1 è autovalore di φ. Nei casi in cui φ è semplice determinare una base di autovettori.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Data la retta

$$r : \begin{cases} x - y + h = 0 \\ 2x + z + 2h = 0 \end{cases}$$

e la retta

$$s : \begin{cases} hx - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

determinare il piano che le contiene e trovare i valori di h per cui esse sono parallele.

2) Determinare la circonferenza tangente alla retta $t :\ z = x - y - 1 = 0$ in A=$(0,-1,0)$ ed alla retta $u :\ z = x + y = 0$ in O=$(0,0,0)$

3) Studiare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, le quadriche di equazione:

$$hx^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + hz^2 - 2x + 1 = 0.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 settembre 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f_h(x, y, z, t, u) = (y, z, t, u, hx),\ h \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare gli autospazi di f_h e dire se f_h è diagonalizzabile.
2) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori
$$(2, 1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 2, 1, 1),\ (0, 2, -1, 2, 0).$$
Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per V.
3) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $W_h = f_h(V) \cap V \subseteq \mathbb{R}^5$.
4) Determinare $\mathrm{Ker}(f_h \circ f_h)$ e $\mathrm{Ker}(f_{h+1} \circ f_h)$.

II

Sia assegnato sullo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Classificare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la conica di equazioni
$$z = (x + hy + 1)^2 + (2x + y + 1)^2 - 1 = 0$$
2) Nel caso $h = -2$ determinare la sua eccentricità.
3) Determinare il cono Q di vertice $V(0, 1, 1)$ contenente la conica $z = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Determinare i piani, passanti per la retta r di equazioni $z = x - y = 0$, che intersecano Q in una parabola.
4) Determinare la sfera tangente alla retta r in $O(0, 0, 0)$ ed al piano $x + y + z - 2 = 0$ in V.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 settembre 2019

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ h & -h & 1 & -1 \\ -h & h & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$, $h \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di h affinché M sia invertibile e calcolarne l'inversa.

2) Siano u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori riga di M. Sia $U = \mathscr{L}(u_2, u_3, u_4)$. Determinare un sistema di equazioni cartesiane di U.

3) Siano v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori colonna di M. Sia $V = \mathscr{L}(v_2, v_3, v_4)$. Determinare la dimensione ed una base di $U \cap V$.

4) Nel caso $h = 1$, si considerino gli endomorfismi $f : U \to U$ tali che
$$\operatorname{Ker} f \supseteq \mathscr{L}(u_2), \ \operatorname{Im} f \subseteq \mathscr{L}(u_2, u_3 + u_4).$$
Dire se tali endomorfismi sono diagonalizzabili.

II

Sia assegnato sullo spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare la quadrica
$$Q: \ x^2 + y^2 - 2xz + kyz + z^2 + 2z - 1 = 0,$$
al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2) Disegnare la conica sezione di Q con il piano $y = 0$.

3) Nel caso $k = -2$, studiare le sezioni di Q con i piani passanti per l'asse $\vec{x}$.

4) Scrivere un sistema di equazioni dell'iperbole equilatera γ, avente per direttrice l'asse $\vec{x}$ e per relativo fuoco $V(1, 1, 1)$.