Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 26 gennaio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Siano $v_1 = (h, 0, 1, 1)$, $v_2 = (1, h, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1, h)$, $h \in \mathbb{R}$. Calcolare un sistema di equazioni per il sottospazio $U_h = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^4$.

2) Determinare una base di $W = U_0 \cap U_1$ ed estenderla ad una base di U_0.

3) Sia $f : U_0 \to U_0$ l'applicazione lineare tale che $f(v) = -v$ per ogni $v \in W$ ed $f(2, 0, -1, 1) = (3, 0, -1, 2)$. Dire se f è diagonalizzabile.

4) Si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare euclideo. Decomporre il vettore $(1, 0, 1, 0)$ nella somma $w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
Siano $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 0, 0)$, $P_3(0, 1, 0)$, $P_4(h, h, 0)$, $h \in \mathbb{R}$.

1) Determinare i centri delle 4 circonferenze passanti per $P_i P_j P_k$, $i < j < k$.

   Dire per quali valori di h si hanno 4 circonferenze distinte.

2) Sia γ la circonferenza passante per $P_1 P_2 P_3$. Sia r il raggio di γ. Sia S la sfera di raggio r contenente γ. Sia $\rho :\ x - z = 0$. Determinare il centro ed il raggio di $\rho \cap S$.

3) Determinare e classificare la proiezione di γ dal punto $V(0, 0, 2)$ sul piano ρ.

4) Studiare la famiglia di coniche

$$\Phi \begin{cases} 4k^2x^2 + 4kxy + y^2 - 4k^2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

   Determinare la tangente in P_2 alle coniche irriducibili di Φ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 16 febbraio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ l'endomorfismo definito dalla legge

$$\varphi(f(x)) = f''(x) + hf'(x) + f(1)$$

1) Verificare che φ è lineare.
2) Studiare φ, determinando al variare di h, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ e $\mathrm{Im}\,\varphi$.
3) Determinare il polinomio caratteristico di φ e studiarne la diagonalizzabilità al variare di h.
4) Determinare $\varphi \circ \varphi(f(x))$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette r ed s di equazioni rispettivamente: $2x - y - 4 = x - z - 3 = 0$ e $x + y - 5 = y + z - 2 = 0$ dire se esse sono incidenti, parallele o sghembe. Calcolarne la loro distanza.
2) Scrivere un sistema di equazioni del fascio ϕ di coniche aventi per asintoti le rette r ed s.
3) Determinare centro e assi di simmetria delle coniche in ϕ.
4) Sia $\gamma \in \phi$ passante per $A(0, 1, -3)$. Trovare un paraboloide che contiene γ e specificare se ci sono circonferenze su tale paraboloide.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 aprile 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Sia $V_h \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio definito dalle equazioni

$$V_h \begin{cases} x_1 - hx_2 = 0 \\ 2x_3 + (h-1)x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2hx_2 + hx_3 + x_4 + (3-h)x_5 = 0 \end{cases} , \quad h \in \mathbb{R}.$$

Determinare la dimensione ed una base di V_h, al variare di h.

2) Dire se la somma $W = V_0 + V_1$ è diretta. Determinare un sistema di equazioni di W.

3) Sia $f : W \to W$ l'endomorfismo definito dalla legge

$$f(x, y, z, t, z-t) = (x+z)(0,0,1,1,0) + (y+t)(1,1,0,0,0).$$

Determinare gli autospazi di f e la loro dimensione.

4) Si consideri su $\mathbb{R}^5$ il prodotto scalare definito dalla forma quadratica $q : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2.$$

Calcolare $V_0^\perp$ e $V_0 \cap (V_0^\perp)$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare i fuochi e le direttrici della conica $\gamma_h \begin{cases} x = 0 \\ 2hyz - 1 = 0 \end{cases}$, $h \in \mathbb{R}$, nei casi in cui essa è irriducibile.

2) Scrivere un sistema di equazioni per la conica δ, simmetrica di γ_1 rispetto alla retta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

3) Determinare la famiglia dei cilindri iperbolici contenenti γ_1 ed i loro vertici.

4) Determinare l'equazione del paraboloide contenente la conica $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x - 2 = 0 \end{cases}$ e γ_1.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 luglio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare così definita

$$f_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} hx + (h+1)y - z & x - hy + (h+1)z \\ hx + hy & x + (1-h)y + hz \end{pmatrix}$$

1) Determinare Ker f_h e Im f_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.
2) Sia $W = \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2,2})$ (il sottospazio di $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici simmetriche). Determinare la dimensione ed una base di $W' = f_2^{-1}(W)$.
3) Sia $g : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^3$ la funzione

$$g \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}).$$

   Studiare la diagonalizzabilità di $g \circ f_h$.
4) Si consideri l'applicazione $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \right) = x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} + x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21}.$$

   Dire se $\mathcal{F}$ definisce un prodotto scalare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Siano $A(1,0,0)$ e $B(3,1,0)$. Scrivere un sistema di equazioni dell'iperbole equilatera γ con centro di simmetria in $A(1,0,0)$, avente per asintoto la retta AB e passante per $O(0,0,0)$.
2) Sia r la retta tangente a γ in O. Studiare il fascio delle coniche tangenti ad r in O e passanti per A e per B.
3) Determinare un sistema di equazioni della circonferenza δ passante per i punti O, A e $C(1,1,1)$.
4) Determinare l'ampiezza dell'angolo convesso formato dalle rette tangenti a δ in O ed in A.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 23 luglio 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \; h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare i valori di h per cui A è diagonalizzabile.

2) Sia $B = A - {}^tA$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla legge
$$f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} B.$$
Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di h, $h \in \mathbb{R}$.

3) Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \; x + y + z - t = 0\}$. Determinare le equazioni cartesiane di $f(V)$.

4) Discutere al variare di h se f è diagonalizzabile.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare il seguente fascio di coniche:
$$z = 3hy^2 + (4h + 1)xy - 2hy - h = 0$$

2) Tracciare il grafico della conica $\gamma : z = 3y^2 + 4xy - 2y - 1 = 0$.

3) Determinare l'equazione del cono che ha vertice $V(0, 1, 1)$ e contenente γ. Determinare la natura della conica sezione con il piano $y = 0$.

4) Sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro V e passante per $O(0, 0, 0)$. Sia r il raggio di $\mathcal{S}$. Determinare i piani, paralleli al piano di equazione $x + y + z = 0$, che intersecano $\mathcal{S}$ in circonferenze di raggio $\frac{r}{2}$.

CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** dell'11 settembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, sono assegnati i vettori $v_1 = (0,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$, $v_3 = (0,2,2,2)$ ed i sottospazi $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = x + y - 3z - 3t = 0\}$.

1. Determinare $V \cap W$ e $V + W$, specificando se la somma è diretta.
2. Data l'applicazione lineare $f \colon V \to \mathbb{R}^4$ definita da
$$f(v_1) = (h+1, 0, -h-1, h^2+h)$$
$$f(v_2) = (h+3, -1, 2, h^2+2h+1)$$
$$f(v_3) = (2, 1, h+1, -2),$$
studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
3. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per il quale f induce un endomorfismo $g \colon V \to V$.
4. Per tale valore di h, studiare la semplicità di g, determinando, se possibile, una base di autovettori.
5. Determinare l'endomorfismo $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui restrizione a V induce g e per il quale W è autospazio associato all'autovalore 2.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Determinare il piano π che contiene i punti :
$$P = (-1,1,0), Q = (1,0,1), R = (1,-1,1).$$
Data la retta
$$\mathbf{u} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$
determinare la retta simmetrica di u rispetto a π.
2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $r \colon z = x + y = 0$ nel punto $A = (1,-1,0)$ e a $s \colon z = 2x - y = 0$ nel punto $B = (1,2,0)$. Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.
3. Determinare l'equazione del cono avente vertice in R e per direttrice l'unica parabola p del fascio .

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 settembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e siano $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gli endomorfismi associati alle matrici A e B, rispetto alle basi canoniche.

1) Determinare una base di $\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Im} f_B$.

2) Determinare, se esiste, una matrice diagonale simile alla matrice B.

3) Determinare il rango della matrice $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$, al variare di k.

4) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f(x, y, z) = f_A(x, y, z) + k f_B(x, y, z), \; k \in \mathbb{R}.$$

Determinare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$, al variare di k.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare il fascio generato dalle coniche $\gamma_1 : z = xy - 1 = 0$ e $\gamma_2 : z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2) Sia r la retta tangente a γ_1 nel punto $(1, 1, 0)$. Sia A il punto in cui r interseca la retta $z = y + 1 = 0$. Determinare le rette passanti per A e tangenti a γ_1.

3) Determinare il cono Q di vertice $(0, 1, 1)$, contenente γ_1.

4) Studiare le sezioni di Q con i piani passanti per l'asse $\vec{x}$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 3 dicembre 2018

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ ed i sottospazi $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \ x + y = z + t = 0\}$

1) Determinare $V \bigcap W$ e $V + W$ specificando se la somma è diretta o meno.
2) Dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica al variare di $h \in \mathbb{R}$ è
$$M(f) = \begin{pmatrix} h & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-h & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
studiare f al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.
3) Dire per quale valore di h la restrizione di f a V induce un endomorfismo φ su V.
4) Dire se φ è semplice determinando, in caso affermativo, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette
$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} .$$
determinare la retta u ortogonale ed incidente ad r e ad s. Detti $R = u \cap r$ ed $S = u \cap s$, si determini la sfera che ha diametro RS. Verificare che r ed s sono tangenti alla sfera.
2) Sul piano coordinato $z = 0$ studiare il fascio Φ generato dalla conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, determinandone, in particolare, i punti base e le coniche spezzate. Studiale la conica Γ luogo dei centri di simmetria delle coniche di Φ.
3) Studiare, al variare del parametro reale h, il fascio θ delle quadriche di equazione
$$2x^2 + y^2 + 2hyz + z^2 - 2hx - 1 = 0$$