Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)
Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 26 gennaio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \mid x_{11} + x_{12} + x_{13} = x_{21} + x_{22} + x_{23} \right\}.$$

1) Sia $\varphi : V \to V$ l'applicazione lineare definita dalla legge $\varphi \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \\ R_1 \end{pmatrix}$, dove R_1 ed R_2 sono le righe della matrice. Dire se φ è diagonalizzabile e determinare una base per ciascuno dei suoi autospazi.

2) Sia $f_h : V \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla legge $f_h \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = (2-h)R_1 + hR_2$, $h \in \mathbb{R}$. Determinare, al variare di h, nucleo ed immagine di f_h.

3) Sia $W = \mathscr{L}((1,1,1))$. Determinare, al variare di h, $f_h^{-1}(W)$ e calcolare la sua dimensione.

4) Sia $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito dalla legge
$$\psi\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_1' \\ R_2' \end{pmatrix} \right) = R_1 \cdot R_2' + R_2 \cdot R_1'.$$
Sia $U = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Calcolare $U^\perp$, rispetto a ψ.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Siano $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C_h(3,h,0)$, $h \in \mathbb{R}$. Determinare il centro, il raggio e le equazioni della circonferenza γ_h (quando esiste) passante per A, B e C_h.

2) Nei casi in cui il triangolo ABC_h è isoscele, determinare l'ampiezza dei suoi angoli interni.

3) Sia $V(1,1,1)$. Tracciare il grafico della proiezione δ da V di γ_1 sul piano $x = 0$.

4) Studiare le quadriche contenenti δ e γ_1.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 febbraio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Sia $f_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla legge
$$f_{a,b}(x,y,z,t) = a(x,y,z) + b(y,z,t).$$
Determinare il nucleo e l'immagine di $f_{a,b}$, al variare di $a,b \in \mathbb{R}$.

2) Si consideri l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle relazioni
$$\begin{cases} g(e_1) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ g(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ g(e_3) = (1,-1,1,1) \end{cases}$$
dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare i valori di $a,b \in \mathbb{R}$ per cui $f_{a,b} \circ g$ non è diagonalizzabile.

3) Calcolare $W = f_{1,1}^{-1}(\mathscr{L}(e_3))$, dove $e_3 = (0,0,1)$. Determinare una base di W.

4) Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita dalla legge
$$\varphi(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + ht^2,\ \ h \in \mathbb{R}.$$
Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, una base di $W^\perp$, rispetto al prodotto scalare associato a φ.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Si considerino i punti $A(0,3,0)$ e $B(2,0,0)$. Scrivere un sistema di equazioni dell'iperbole equilatera γ_1 con centro in A, avente per asintoto la retta AB e passante per $O(0,0,0)$.

2) Scrivere un sistema di equazioni dell'iperbole equilatera γ_2 avente vertici in A e B e giacente sul piano di equazione $z = 0$. Tracciare il grafico di γ_2.

3) Determinare $k > 0$ in modo tale che γ_2 si possa trasformare, tramite una rototraslazione, in una iperbole di equazioni $xy = k$, $z = 0$. Determinare una forma canonica di γ_2.

4) Si consideri il piano $p_h : h(3x + 2y - 6) + (1-h)z = 0$. Determinare la retta giacente su p_h passante per B ed ortogonale ad AB.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)
Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 27 aprile 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano
$$v_1 = (1,0,0,1,0),\ v_2 = (0,1,0,1,0),\ v_3 = (0,0,1,1,0),\ v_4 = (0,0,0,2,1)$$
e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subset \mathbb{R}^5$.

1) Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f_h : V \to \mathbb{R}^2$, definita dalla legge
$$f_h(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, hx_1 + x_2 + x_3 + x_4),\ h \in \mathbb{R}.$$

2) Sia $g_k : \mathbb{R}^2 \to V$ l'applicazione lineare definita dalla legge
$$g_k(x, y) = (x, ky, x, 2x + 3ky, ky).$$
Determinare $g_k^{-1}(\mathscr{L}(v_1, v_3))$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3) Determinare il polinomio caratteristico di $\varphi_{h,k} = g_k \circ f_h$, $h, k \in \mathbb{R}$ e studiare la semplicità di $\varphi_{h,h}$.

4) Si consideri su $\mathbb{R}^5$ il prodotto scalare canonico. Calcolare $\mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)^\perp + \mathscr{L}(v_3, v_4)^\perp$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere un sistema di equazioni dell'insieme Φ di coniche aventi vertici in $V_1(0,0,0)$ e $V_2(1,1,0)$, simmetriche rispetto alla retta V_1V_2 e giacenti sul piano di equazione $z = 0$.

2) Scrivere un sistema di equazioni dell'insieme Ψ di coniche aventi vertici in $V_1(0,0,0)$ e $V_2(1,1,0)$, simmetriche rispetto alla retta V_1V_2 e giacenti sul piano ortogonale al piano di equazione $z = 0$.

3) Sia $\psi \in \Psi$ la circonferenza. Determinare il cono di vertice $V(1,0,1)$ contenente ψ.

4) Determinare l'eccentricità delle coniche irriducibili in Φ, le cui equazioni sono
$$\begin{cases} (h+1)x^2 - 2(h-1)xy + (h+1)y^2 - 2x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 19 giugno 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano

$$u_1 = (1,1,1,1,1,1),\ u_2 = (1,-1,1,-1,1,-1),\ u_3 = (0,1,0,1,0,2),\ u_4 = (1,0,1,0,2,0)$$

e sia $U = \mathscr{L}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^6$. Sia inoltre

$$V = \{(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5 \mid y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 = 0\}.$$

1) Determinare la dimensione ed un sistema minimale di equazioni di U.

2) Sia $f_h : U \to V$, $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$f_h(u_1) = (1,1,1,1,0),\ f_h(u_2) = (0,1,1,1,1),\ f_h(u_3) = (2,1,1,h+2,h),$$
$$f_h(u_4) = (3,1,1,h+2,h-1).$$

Determinare nucleo ed immagine di f_h, al variare di h.

3) Sia $g : V \to V$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (y_5, y_4, y_3, y_2, y_1).$$

Determinare gli autospazi di g e dire se g è diagonalizzabile.

4) Si consideri su U il prodotto scalare rispetto al quale la base (u_1, u_2, u_3, u_4) è ortonormale. Siano $e_5 = (0,0,0,0,1,0)$ ed $e_6 = (0,0,0,0,0,1)$. Calcolare $\mathscr{L}(e_5, e_6)^\perp \subset U$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere un sistema di equazioni della circonferenza γ passante per i punti

$$O(0,0,0), A(0,0,2), B(1,1,1).$$

2) Determinare le circonferenze tangenti a γ in O, di raggio 1, complanari a γ.

3) Studiare il fascio di coniche $\begin{cases} x - y = 0 \\ \lambda(x+2z)^2 + \mu(2x^2 + z^2 - x - 2z) = 0 \end{cases}$, determinando anche i punti base.

4) Studiare il fascio di quadriche contenenti γ e la conica di equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + z^2 - x - 2z = 0 \end{cases}.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 luglio 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0,\ x - y - t = 0\}$$

e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - z + ht = 0,\ 2y + hz + t = 0\}.$$

1) Determinare i valori di h per cui la somma $U + W$ è diretta.

2) Nei casi in cui $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, decomporre $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ nella somma di un vettore di U e di uno di W.

3) Nel caso $h = 1$, si considerino gli endomorfismi $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $U \subseteq \operatorname{Ker} f$, $f(W) \subseteq U$. Dire se essi sono diagonalizzabili.

4) Studiare la segnatura della forma quadratica

$$q(x, y, z, t, u) = -3x^2 - 2y^2 - 2yz - z^2 - 2xt - 2yt + 2xu + 2zu - u^2.$$

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la proiezione γ della conica $z = x^2 - y = 0$ sul piano $x - 2z = 0$ nella direzione della retta $x = y = z$.

2) Determinare il fascio di rette complanari a γ e perpendicolari all'asse di simmetria di γ.

3) Studiare la quadrica

$$Q_h :\ 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 + h(x + y + z + 1)^2 = 0,\ h \in \mathbb{R}.$$

4) Tra le quadriche del punto precedente sia Q^* quella passante per $O(0, 0, 0)$. Studiare le sezioni di Q^* con i piani passanti per l'asse $\vec{x}$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 settembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 1 & 2 & h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$ e sia $\widetilde{M}$ la matrice aggiunta di M. Siano inoltre $N = \begin{pmatrix} M \\ \widetilde{M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,3}$ e $P = \begin{pmatrix} \widetilde{M} & M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,6}$.

1) Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata a $\widetilde{M}$ rispetto alla base canonica. Determinare $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$, per ogni $h \in \mathbb{R}$. Dire se essi sono costanti al variare di h.

2) Sia $g_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ l'applicazione lineare associata a N rispetto alla base canonica. Studiare l'applicazione lineare $g_h \circ f_h$.

3) Calcolare il rango della matrice NP, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

4) Studiare la segnatura della forma quadratica associata alla matrice $M + {}^tM$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare il fascio Φ di coniche che osculano la circonferenza di equazioni $\delta : z = x^2 + y^2 - 1 = 0$ nel punto $A(-1, 0, 0)$ e passano per il punto $B(0, 1, 0)$.

2) Sia $\gamma \in \Phi$ l'iperbole equilatera. Tracciare il grafico di γ.

3) Determinare la conica δ', simmetrica di δ, rispetto al piano $p : x + y + z = 0$. Calcolare centro e raggio di δ'.

4) Sia T il triangolo equilatero inscritto in δ' avente un vertice nel punto simmetrico di A rispetto al piano p. Determinare i rimanenti vertici di T.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 25 settembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Diagonalizzare, quando è possibile, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

2) Sia $f_h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata ad M rispetto alla base canonica.
Sia $g_h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare, definita dalle relazioni $g_h(e_1) = e_1 + e_2$, $g_h(e_2) = h^2 e_1 + e_2$, dove (e_1, e_2) è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.
Studiare l'endomorfismo $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $h \in \mathbb{R}$, definito dalla legge
$$\varphi_h(x, y, z, t) = (f_h(z, t), g_h(x, y)).$$

3) Nei casi in cui φ_h non è invertibile, dire se è diagonalizzabile.

4) Sia $W = \mathscr{L}\big((1, 1, 1, 1)\big)$. Determinare $\varphi_h^{-1}(W)$ e la sua dimensione, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si considerino i punti $O(0, 0, 0)$ ed $A(0, 1, -1)$. Determinare sul piano $p: \ x + y + z = 0$ il punto H, giacente sul semispazio $x > 0$, tale che il triangolo OAH sia equilatero.

2) Studiare le sezioni della quadrica di equazione $(x - 1)(y - 1) + z^2 = 0$, con i piani passanti per la retta OA.

3) Scrivere un sistema di equazioni per la parabola γ tangente nel vertice O alla retta OA e passante per $B(1, 0, -1)$.

4) Sia $\tilde{p}$ il piano passante per OA e perpendicolare a p. Scrivere un sistema di equazioni per le circonferenze di raggio $\sqrt{3}$, giacenti su $\tilde{p}$ e tangenti alla retta OA in O.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 novembre 2017

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f_h(x,y,z) = (x+y, x+3hy+2z, x+4y+3z, 2x+3y+hz).$$

1) Determinare $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$, al variare di h. Dire se $\operatorname{Im} f_1 \subseteq \operatorname{Im} f_h$, al variare di h.

2) Sia $u_1 = (0,-3,0,1)$. Determinare $f_h^{-1}(\{u_1\})$ e $f_h^{-1}(\mathscr{L}(u_1))$, al variare di h.

3) Siano $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,0)$, $u_4 = (1,0,0,0)$ e sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$g(u_1) = (1,-1,1),\ g(u_2) = (0,0,1),\ g(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3},\ g(u_4) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $g \circ f_h$.

4) Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2$ e sia $W = \mathscr{L}(g(u_1))$. Calcolare $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare definito da q su $\mathbb{R}^3$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare la conica $\gamma_{h,k} : \begin{cases} hx + kz = 0 \\ x^2 + y^2 - 2yz + 2z - 1 = 0 \end{cases}$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

2) Sia δ la circonferenza $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$. Studiare il fascio Φ di quadriche contenenti δ e $\gamma_{2,-1}$.

3) Determinare i vertici delle quadriche degeneri in Φ.

4) Sul piano di equazione $2x - z = 0$, determinare dei sistemi di equazioni per le due circonferenze tangenti all'asse $\vec{y}$ in $O(0,0,0)$ e di raggio $r > 0$.