Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'8 febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & 0 & -c \\ 0 & -b & -a \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ una base di $\operatorname{Ker} f$ ed un sistema di equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$.
2) Determinare il polinomio caratteristico di f e studiarne la diagonalizzabilità nel caso $b = 1$ e $c = -1$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.
3) Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla legge
$$\varphi(x, y, z, t) = (f(x, y, z), 2x - 2y + ht).$$
Nel caso $a = 1, b = 1, c = -1$, determinare $\operatorname{Ker} \varphi$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) Sempre nel caso $a = 1, b = 1, c = -1$, determinare $\varphi \circ \varphi(x, y, z, t)$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si consideri la conica $\gamma : z = x^2 + y^2 - 1 = 0$ e sia P un punto appartenente alla retta di equazioni $z = y - 1 = 0$. Determinare le rette r_P ed s_P, passanti per P e tangenti a γ.
2) Siano $A = r_P \cap \gamma$ e $B = s_P \cap \gamma$. Determinare la parabola ϑ, tangente a γ in A e B.
3) Nel caso in cui P abbia coordinate $(3, 1, 0)$ tracciare il grafico di ϑ.
4) Nel caso in cui P abbia coordinate $(0, 1, 0)$ sia Φ il fascio di quadriche contenenti ϑ e la conica $y = x^2 + z^2 - 2 = 0$. Classificare le quadriche in Φ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 29 febbraio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Studiare la diagonalizzabilità dell'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A_h = \begin{pmatrix} h & h+2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \;\; h \in \mathbb{R}.$$

2) Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale $\bigcap_{h\in\mathbb{R}} \operatorname{Im} f_h$.

3) Sia $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$\varphi_h(x, y, z, t) = f_h(x, y, z) - f_{h-2}(z, x, t).$$

Studiare φ_h al variare di h.

4) Determinare $\varphi_h^{-1}(\mathscr{L}(1, 1, 1))$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Siano $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(2, 0, -1)$, $P_3(0, 1, 0)$. Determinare un sistema di equazioni della circonferenza γ, tangente alla retta P_2P_3 in P_3 e passante per P_1.

2) Sia r il raggio di γ. Determinare le sfere di raggio $\sqrt{10}r$ contenenti γ.

3) Determinare la proiezione γ' di γ sul piano $x = 0$, nella direzione ortogonale a tale piano.

4) Determinare l'eccentricità di γ'.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 9 maggio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ l'applicazione lineare definita dalla legge $\varphi(f) = f'' + hf' + hf$, $h \in \mathbb{R}$.

1) Scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base $\mathscr{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$.
2) Determinare la dimensione ed una base degli autospazi di φ.
3) Determinare $\varphi^{-1}(1+x^3)$.
4) Sia $W = \{f \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(-1) = 0.\}$ Nel caso $h = 1$ studiare $(\varphi \circ \varphi)_{|W}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si considerino i punti $O(0,0,0)$, $F(-2,-1,0)$, $P(0,1,0)$, $C(4,3,2)$. Determinare il cono Q di vertice C, contenente la circonferenza passante per O, F e P.
2) Determinare i punti O', F' e P', proiezioni, rispettivamente, di O, F e P da C, sul piano $x - z = 0$.
3) Scrivere le equazioni della famiglia Φ di coniche aventi fuochi in O', in F' e giacenti sul piano $O'F'P'$.
4) Tra le coniche del punto precedente, determinare l'iperbole equilatera γ. Determinare gli asintoti di γ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)
Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 giugno 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ si considerino i vettori

$$u_1 = (1,1,0,0,0),\ u_2 = (0,0,1,1,1),\ u_3 = (0,1,1,1,0),\ v = (2,2,1,2-h,h),$$

con $h \in \mathbb{R}$. Siano $U = \mathscr{L}(u_1, u_2, u_3)$ e $V = U + \mathscr{L}(v)$.

1) Determinare, al variare di h, un sistema minimale di equazioni per V. Dire per quali valori di h, $U = V$.

2) Sia $f : U \to V$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 + u_2 + v \\ f(u_2) &= u_1 + u_3 + v \\ f(u_3) &= u_1 + u_3 - f(u_1). \end{aligned}$$

Studiare f al variare di h.

3) Nel caso in cui f è un endomorfismo, dire se f è diagonalizzabile.

4) Per ogni $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, sia $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$. Studiare la segnatura della forma quadratica $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$\varphi(u) = u \cdot u - 2u \cdot g(u).$$

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare i valori di a e b affinché la conica $z = (2x-3y)^2 + 2ax + 2by = 0$ sia una parabola. Per tali valori determinare il suo asse di simmetria.

2) Siano $A(3,1,0)$, $V(0,-1,0)$. Scrivere l'equazione della parabola p passante per $O(0,0,0)$, avente come asse di simmetria la retta AV e vertice in V.

3) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera che iperoscula p nel suo vertice.

4) Determinare centro e raggio della circonferenza passante per A, V e $P(0,0,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)
Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'11 luglio 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano $w_1 = (1,1,1,0,0)$, $w_2 = (0,1,1,1,0)$, $w_3 = (0,0,1,1,1)$. Sia $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^5$.

1) Determinare una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare euclideo.

2) Studiare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to W$ definita dalla legge

$$f(x,y,z,t) = m(2mx + z - mt)w_1 + 2m^2(y-t)w_2 + (mx - 2z + 2mt)w_3,\ m \in \mathbb{R}.$$

3) Sia $V = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + hz + u + t = 0\}$, $h \in \mathbb{R}$. Sia $W' = W \cap V$. Nei casi $m = 0$ ed $m = 1$ determinare una base di $f^{-1}(W')$.

4) Sia $U = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y = x + z = x + 2t - u = 0\}$. Provare che $\mathbb{R}^5 = W \oplus U$ e scomporre $(1,1,1,1,1)$ nella somma di un vettore di W ed uno di U.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sia γ la circonferenza tangente alla retta $z = x + 2y = 0$ in $O(0,0,0)$ e passante per $A(1,0,0)$. Sia r il suo raggio. Determinare le sfere di raggio $2r$ contenenti γ.

2) Studiare il fascio delle coniche bitangenti a γ nei punti in cui essa interseca la retta di equazioni $z = 4x - y = 0$.

3) Determinare i vertici della quadrica

$$Q_h :\ h^2x^2 + h^2y^2 + hxz - z^2 - h^2x - 2h^2y + 2hz = 0,\ \ h \in \mathbb{R}.$$

4) Studiare le sezioni di Q_2 con i piani passanti per l'asse $\vec{y}$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 12 settembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Sia $v = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $W = \{M \in \mathbb{R}^{2,3} \mid v^t M = 0\}$. Determinare una base e la dimensione di W.

2) Sia $V = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid x - y + z - t + u = 0\}$. Determinare una matrice associata e studiare l'applicazione lineare $f : V \to W$ definita dalla legge
$$f(x,y,z,t,u) = xM_1 + yM_2 + z(M_1 + M_2) + t(M_1 - M_2) + huM_3,\ h \in \mathbb{R}$$
dove $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Sia $g : W \to V$ l'applicazione lineare definita dalla legge
$$g\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = (x_{11} + x_{12}, x_{11} + x_{12}, x_{21} + x_{22}, x_{21} + x_{22}, 0).$$
Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $f \circ g$.

4) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (2,0,-1)$ e sia
$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
il prodotto scalare tale che (v_1, v_2, v_3) sia una base ortogonale e
$$\psi(v_1, v_1) = 1,\ \psi(v_2, v_2) = -1,\ \psi(v_3, v_3) = -1.$$
Determinare la matrice associata a ψ rispetto alla base canonica.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro h, la conica
$$\gamma_h \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 2hx - 2hy - h^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$
Tracciare il grafico di γ_4.

2) Nel caso $h \neq 0$ determinare le coniche simmetriche a γ_h rispetto al suo fuoco e rispetto al suo vertice.

3) Studiare le quadriche contenenti γ_1 e la conica $\delta \begin{cases} x^2 + z^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

4) Tra le quadriche del punto precedente sia Q quella passante per $P(0,1,1)$. Determinare le sfere di raggio 1 tangenti a Q in P.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 3 ottobre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Determinare una base del nucleo ed un sistema di equazioni dell'immagine dell'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$f_h(e_1) = (2, 1, -3),\ f_h(e_2) = (1, -2, 1),\ f_h(e_3) = (3, -h, h-3),\ f_h(e_4) = (-1, 1, 0),$$

dove (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $h \in \mathbb{R}$.

2) Determinare la dimensione, una base ed un sistema di equazioni del sottospazio

$$V = \operatorname{Ker} f_{-1} + \operatorname{Ker} f_0 + \operatorname{Ker} f_1 \subseteq \mathbb{R}^4.$$

3) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$g(1, -1, 0) = (0, 0, 0, 0),\ g(0, 1, -1) = (1, 1, 1, 2),\ g(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0).$$

Dire se l'endomorfismo $g \circ f_h$ è diagonalizzabile.

4) Calcolare $g^{-1}(\operatorname{Ker} f_0)$ e $g^{-1}(V)$ e stabilire se essi coincidono con $\operatorname{Ker} g$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si consideri il piano $p_h : x + y + z + h = 0$, $h \in \mathbb{R}$, e la quadrica $S : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Determinare il centro ed il raggio della circonferenza $\gamma_h = p_h \cap S$, nei casi in cui γ_h è a punti reali.

2) Determinare gli eventuali paraboloidi contenenti γ_0 e γ_1.

3) Siano $A(1, 0, -1)$, $B(0, 1, -1)$. Determinare le circonferenze, giacenti sul piano p_0, passanti per A e B, di raggio 2.

4) Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici perpendicolari al piano p_0, contenente γ_0.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 21 novembre 2016

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Studiare la segnatura della forma quadratica $q : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ definita da
$$q(x, y, z, t, u, v) = 2(x + y)(z + t) + 2(z + t)(u + v) + 2(x + y)(u + v).$$

2) Sia B la matrice associata a q. Sia $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è B. Dire se la somma $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ è diretta.

3) Determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^6$, rispetto ad f.

4) Sia $\widehat{f} : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$, l'endomorfismo indotto dalla restrizione di f a $\operatorname{Im} f$. Dire se $\widehat{f}$ è un isomorfismo.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la quadrica
$$Q_k : \; x^2 - 2xz + ky^2 + z^2 - 2y + 2z = 0.$$

2) Sia p il piano di equazione $x + y - 2z = 0$ e sia $\gamma = p \cap Q_0$. Classificare γ.

3) Determinare il fascio di rette del piano p, ortogonali alle due componenti di γ.

4) Siano r_1 ed r_2 le due componenti di γ e sia s la retta del piano p passante per $A(2, 0, 1)$ ed ortogonale ad r_1 ed r_2. Determinare centro, raggio ed un sistema di equazioni della circonferenza tangente a r_1 in $s \cap r_1$ e ad r_2 in $s \cap r_2$.