Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 2 febbraio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Determinare gli eventuali valori di h affinché la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sia simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & h \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

2) Calcolare la dimensione ed una base del sottospazio $\mathscr{L}(A^{-1}, A, I) \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$, dove I è la matrice identità in $\mathbb{R}^{2,2}$.

3) Siano $p_A(x)$ e $p_B(x)$ i polinomi caratteristici di A e B, rispettivamente, espressi nella variabile x. Studiare, al variare del parametro reale h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_2$, definita dalla legge

$$f(a, b, c) = ap_A(x) + bp_B(x) + c(p_A(x) - p_B(x)).$$

4) Sia $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}^3$, definita dalla legge

$$g(a + bx + cx^2) = (a + c, a + c, a + c).$$

Determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla funzione $g \circ f$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare l'eccentricità della conica

$$\gamma \begin{cases} z = 0 \\ 13x^2 - 8xy + 7y^2 - 30x = 0 \end{cases}.$$

2) Studiare il fascio delle coniche che iperosculano γ nell'origine.

3) Determinare la parabola p tangente a γ nell'origine, avente per asse di simmetria la retta $z = x + y + 1 = 0$. Tracciare il grafico di p.

4) Determinare e studiare la quadrica contenente la conica $p : z = (x + y)^2 + 4x = 0$, simmetrica rispetto al piano $z = 0$ e passante per $A(1, 1, 1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 20 febbraio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Studiare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $\Delta_h : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, definita dalla legge
$$\Delta_h(p(x)) = p(x+h) - p(x).$$

2) Sia $\mathscr{B} = \left(1-x, (1-x)^2, (1-x)^3, x^3\right)$. Determinare la matrice associata a Δ_{-1}, rispetto alla base $\mathscr{B}$.

3) Studiare la diagonalizzabilità di Δ_h.

4) Sia $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 \mid p(1) = 0\}$. Determinare una base di $\Delta_{-1} \circ \Delta_1(W)$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si considerino il piano $s\colon\ x+z+1=0$ ed il punto $O(0,0,0)$. Determinare e studiare il luogo Q_h dei punti P dello spazio tali che $d(P,O) = h\, d(P,s)$, $h \in \mathbb{R}$.

2) Tracciare il grafico della sezione di Q_1 (di equazione $(x-z)^2 + 2y^2 - 2(x+z) - 1 = 0$) con il piano π_x di equazione $x = 0$.

3) Sia π_z il piano di equazione $z = 0$. Studiare la quadrica Φ passante per $A(1,1,1)$, contenente le coniche $Q_1 \cap \pi_x$ e $Q_1 \cap \pi_z$.

4) Determinare l'equazione dell'insieme delle sfere tangenti a Φ (di equazione $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$) in A.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 13 Aprile 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

1) Si considerino i sottospazi $U_h, V_h, W_h \subset \mathbb{R}^4$ definiti da

$$\begin{aligned} U_h &= \mathscr{L}((1,-1,h,h),(h,-h,1,1)), \\ V_h &= \mathscr{L}((1,h,-1,h),(h,1,-h,1)), \\ W_h &= \mathscr{L}((1,h,h,-1),(h,1,1,-h)). \end{aligned}$$

   Trovare i valori $h \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U_h + V_h + W_h$ è diretta.

2) Posto $U = U_1 + V_1 + W_1$, descrivere tutti gli endomorfismi $f : U \to U$ tali che $f|_{U_1} = \mathrm{id}_{U_1}$, $f(V_1) = W_1$, $f(W_1) = V_1$ e $\det f = 1$, determinandone le matrici associate rispetto ad una opportuna base di U.

3) Verificare che le assegnazioni

$$\begin{aligned} g(1,-1,1,1) &= (1,-1,1,1), \\ g(1,1,-1,1) &= (1,1,1,-1), \\ g(1,1,1,-1) &= (1,1,-1,1) \end{aligned}$$

   definiscono un unico endomorfismo $g : U \to U$, con U il sottospazio definito nel quesito precedente, e studiare la diagonalizzabilità di g.

4) Determinare una base ortogonale di U.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Per un punto arbitrario $P(a,b,c)$ dello spazio, determinare il suo simmetrico P' rispetto al piano $\Pi(y+z-1=0)$

2) Scrivere l' equazione del fascio di coniche appartenenti al piano $x=0$, simmetriche rispetto al piano Π e passanti per i punti $A(0,1,0)$ e $B(0,0,1)$.

3) Studiare il fascio di coniche determinato nel quesito precedente.

4) Studiare il fascio di quadriche di equazione $x^2 + h(y+z-1)^2 = 0$ al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 19 giugno 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ h & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, $h, k \in \mathbb{R}$, e siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gli endomorfismi, le cui matrici associate, rispetto alla base canoniche sono, rispettivamente, M ed ${}^tM$.

1) Calcolare una base di $\operatorname{Im} f$ per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.
2) Studiare l'endomorfismo $f \circ g - g \circ f$, per ogni $h, k \in \mathbb{R}$.
3) Nel caso $k = 0$, determinare una base di $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.
4) Nel caso $k = h$, dopo aver verificato che, per ogni $h \in \mathbb{R}$, $h + 2$ è un autovalore di f, studiare la diagonalizzabilità di f.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare il centro ed il raggio della circonferenza

$$\gamma \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2y^2 + 4yz + 5z^2 + 4y + 4z - 2 = 0 \end{cases} .$$

2) Scrivere le equazioni delle sfere di raggio 3, contenenti γ.
3) Determinare il cilindro Q avente generatrici perpendicolari al piano su cui giace γ e contenente γ.
4) Tracciare il grafico della sezione di Q con il piano $z = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E), (P-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 Luglio 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & h \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$, e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l' endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è A_h.

1) Determinare Ker f_h e Im f_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la diagonalizzabilità di f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.

3) Date le matrici A_h e $B_h = \frac{1}{2}(A_h - A_{-h})$, verificare che esse hanno lo stesso polinomio caratteristico, ma che non sono simili, per ogni $h \neq 0$.

4) Determinare i valori $h \neq 0$ tali che gli autospazi di f_h siano a due a due ortogonali, rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$. Detto $g_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è B_h, rispondere alla stessa domanda relativamente a g_h.

II

Sia assegnato nello spazio $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati i punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ considerare le simmetrie $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a tali punti. Verificare che $\sigma_B \circ \sigma_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la traslazione che manda un punto $P \in \mathbb{R}^3$ arbitrario nel punto $P \mapsto P + v$, con v un vettore costante da determinare. Verificare inoltre che $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la simmetria rispetto ad un punto D, da determinare.

2) Scrivere l'equazione del fascio di coniche nel piano $z = 0$ simmetriche rispetto alla retta $z = x - y = 0$ e passanti per i punti $P(0,1,0)$ e $Q(1,2,0)$.

3) Studiare il fascio precedente, determinando inoltre le equazioni delle circonferenze appartenenti a tale fascio.

4) Scrivere l'equazione del cilindro con rette generatrici parallele alla retta $z = x = y$ e contenente la circonferenza $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'11 settembre 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ e $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{C} \right\}$.

1) Diagonalizzare A.

2) Calcolare A^n, per ogni $n \geq 1$, n intero dispari.

3) Determinare una base di V che estende (I, A, A^2).

4) Studiare l'endomorfismo $f : V \to V$, $f(X) = X + h\, {}^tX$, $h \in \mathbb{R}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere l'equazione dell'iperbole γ, giacente sul piano $z = 0$, avente centro in $C(1, 0, 0)$, vertice in $V(2, 3, 0)$ e fuoco in $F(3, 6, 0)$.

2) Determinare le rette tangenti a γ nei suoi vertici.

3) Calcolare l'equazione della sfera S passante per i vertici di γ, per $O(0, 0, 0)$ e per $A(0, 0, 1)$.

4) Studiare il fascio di quadriche generato dalla quadrica di equazione $(2y + 3)(2z - 1) = 0$ e da S.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 28 Settembre 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare euclideo e siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite dalle leggi $f(x,y,z) = ((x+y)/2, (x+y)/2, z)$ e $g(x,y,z) = (x, (y+z)/2, (y+z)/2)$, rispettivamente.

1) Calcolare le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(f)$ e mostrare che $\ker f$ è ortogonale a $\mathrm{Im}(f)$. Fare la stessa cosa per g.

2) Determinare al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ le dimensioni di nucleo e immagine di $f + \lambda g$.

3) Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per f.

4) Mostrare che, per una qualsiasi base ortonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$, la matrice associata ad $f + \lambda g$ rispetto a $\mathcal{B}$ è simmetrica per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

II

Sia assegnato nello spazio $\mathbb{R}^3$ un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si considerino le rette r di equazioni $z = x - y + 1 = 0$ ed s di equazioni $z = x = 0$. Determinare l'espressione della funzione che manda un punto $P = (x, y, 0)$ del piano $z = 0$ nel suo simmetrico rispetto alla retta r. Fare lo stesso relativamente alla retta s.

2) Detto C il punto di intersezione fra r ed s, determinare le equazioni della conica simmetrica rispetto a r ed s e che interseca s in due punti A, B di distanza da C uguale a 1.

3) Determinare tutte le equazioni delle coniche nel piano $z = 0$ simmetriche rispetto a entrambe le rette r ed s.

4) Scrivere l' equazione del cono con vertice nel punto $V(0,0,1)$ e contenente la conica $z = (x - 2y + 1)^2 + (y + 2x + 1)^2 - 1 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Civile e Ambientale (A-L)
CdL in Ingegneria Industriale (A-E), (P-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 dicembre 2015

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

e sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'endomorfismo, la cui matrice associata, rispetto alle basi canoniche, è A e sia $V = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y + z + t - u = 0\}$.

1) Determinare, al variare di h, una base di $\operatorname{Ker} f$ ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^5$.

2) Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f \geq 2$, scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base determinata nel punto precedente.

3) Determinare la dimensione ed un sistema di equazioni del sottospazio $W = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid f(v) \in V\}$.

4) Sia $\widehat{f} : W \to V$ l'applicazione indotta da f. Determinare un'applicazione lineare $g : V \to W$ tale che 2 sia autovalore doppio per $g \circ \widehat{f}$ e tale che $g \circ \widehat{f}$ non sia diagonalizzabile.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro k, la quadrica Q_k di equazione

$$Q_k : \; x^2 + xz + kz^2 - 4y + z = 0.$$

2) Studiare le sezioni di Q_1 con i piani passanti per l'asse $\vec{y}$.

3) Sia π il piano di equazione $z = 0$ e sia $\gamma = \pi \cap Q_k$. Determinare la conica γ', simmetrica di γ rispetto al piano di equazione $x + y + z = 0$.

4) Determinare il fuoco e la direttrice di γ'.