Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 27 gennaio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & h & 5-h \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$ al variare di h.

2) Determinare i valori di h per cui la somma $\operatorname{Ker} f_h + \operatorname{Im} f_h$ è diretta.

3) Studiare la diagonalizzabilità di f_h, nei casi in cui 1 è autovalore.

4) Determinare $f_8(\operatorname{Im} f_h)$, al variare di h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sia r la retta di equazioni $x + z = 0$, $2x - y = 0$ e sia $P(3, 0, 1)$.

1) Determinare la retta s passante per P, ortogonale e complanare a r.

2) Scrivere un sistema di equazioni del fascio Φ di coniche aventi per asintoti le rette r ed s.

3) Determinare gli assi di simmetria delle coniche in Φ.

4) Sia $\gamma \in \Phi$ passante per $A(2, 1, 0)$. Determinare un paraboloide contenente γ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-E)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 febbraio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) Diagonalizzare la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

2) Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale

$$V = \{X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid X \text{ è simmetrica e } XM = DX\},$$

dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Studiare l'applicazione lineare $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, definita dalla legge

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = (a+d, b+e, c+kf),\ k \in \mathbb{R}.$$

4) Calcolare, al variare di k, $\varphi^{-1}(1,0,2)$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Si considerino le rette $r \equiv (z-1 = x-y = 0)$ ed $s \equiv (z+1 = x+y = 0)$. Scrivere l'equazione del luogo dei punti $P \equiv (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ equidistanti da r e da s.

2) Verificare che il luogo dei punti di cui sopra è simmetrico rispetto al piano $x+y=0$.

3) Studiare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, le coniche Γ_h di equazioni $xy + 2z = x + y - h = 0$.

4) Data la conica C di equazione $z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0$, trovarne gli assi di simmetria e le intersezioni di tali assi con C.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 14 aprile 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f_h(x,y,z) = (x + 3y + hz, x + hy + (h-1)z, hx + 2y + (2-h)z, -y + (h-3)z).$$

1) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$, al variare di h.

2) Sia $V = \operatorname{Im} f_0$. Calcolare $\dim_{\mathbb{R}}(f_h^{-1}(V))$, al variare di h.

3) Sia $\mathscr{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\varphi_h : \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Im} f_h$ l'applicazione indotta da f_h. Determinare $\mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(\varphi_0^{-1})$, dove $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, con $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,0,1)$, $v_3 = (2,0,1,0)$.

4) Determinare un endomorfismo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\operatorname{Im} f_2$ sia autospazio associato all'autovalore 1 e l'autovalore 1 abbia molteplicità algebrica 4.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Calcolare l'equazione dell'ellisse γ avente fuochi in $F_1(1,0,0)$ ed $F_2(3,4,0)$ e passante per $O(0,0,0)$.

2) Calcolare l'eccentricità di γ.

3) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera δ avente fuoco in F_1 e direttrice relativa a F_1 coincidente con quella di γ.

4) Studiare il fascio di quadriche contenenti δ e la conica di equazioni $y = 3x^2 - 22x - 13 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 23 giugno 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f(x, y, z, t) = (x, y + z + t, y, y)$$

e si considerino i sottospazi $V_h = \{(x, y, z, t) \mid h(y - t) + z - t = 0\}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Determinare i valori di h per cui la restrizione $g : V_h \to \mathbb{R}^4$ di f a V_h non è iniettiva e per tali h determinare nucleo e immagine di g.

2) Determinare i valori $h \in \mathbb{R}$ tali che $f(V_h) \subseteq V_h$.

3) Per i valori di h del quesito precedente studiare la semplicità dell'endomorfismo indotto da f su V_h.

4) Determinare una base ortonormale dello spazio U definito come l'intersezione di tutti i V_h ed estenderla a base ortonormale di V_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere equazioni della retta r' simmetrica della retta r di equazioni $z = x - y - 3 = 0$ rispetto alla retta s di equazioni $z = x - y - 1 = 0$.

2) Scrivere l'equazione del fascio di coniche nel piano $z = 0$ aventi come asse di simmetria la retta $z = x + y = 0$ e passanti per i punti $A(1/2, -1/2, 0)$ e $B(3/2, -3/2, 0)$, determinandone le coniche riducibili.

3) Studiare il fascio del quesito precedente e trovare l'iperbole equilatera e la circonferenza ad esso appartenenti.

4) Trovare l'equazione della quadrica che contiene le coniche $\Gamma_1 :\ z = (x-1)(y+1) + 1/4 = 0$ e $\Gamma_2 :\ x + y = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1/2 = 0$ e passante per il punto $P(1, 0, 1)$. Studiare la quadrica così ottenuta.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 14 luglio 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $\varphi_h : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$, $h \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare definita dalla legge

$$\varphi_h(a + bx + cx^2 + dx^3) = 2a + d + [2b + (h-1)c + d]x + (hc + d)x^2 + (1-h)dx^3.$$

1) Studiare la diagonalizzabilità di φ_h, al variare di h.
2) Determinare la somma degli autospazi, al variare di h.
3) Sia $V = \{f \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(-1) = f'(-1) = 0\}$ e sia $\psi = \varphi_{1|V}$. Determinare $\operatorname{Ker}\psi$ e $\operatorname{Im}\psi$.
4) Calcolare $\psi^{-1}(\{2 + kx + x^2\})$, al variare di k, $k \in \mathbb{R}$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la conica

$$\gamma_h \begin{cases} x^2 - (1+h^2)y^2 - 1 = 0 \\ hy - z = 0 \end{cases}$$

è un'iperbole equilatera.

2) Verificare che le coniche γ_h, al variare di h, sono tutte concentriche. Determinare i loro asintoti.
3) Determinare e studiare il luogo geometrico descritto da γ_h, al variare di h.
4) Determinare l'equazione del cilindro contenente γ_1, con generatrici perpendicolari al piano su cui giace γ_1.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell' 8 settembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare una base di $\ker f_h$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

2) Per ogni $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ determinare l'insieme $f_h^{-1}(a, b, c)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Sia (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $g_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare soddisfacente le due condizioni $f_h \circ g_h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\mathrm{Im}\, g_h \subseteq \mathscr{L}(e_1, e_2, e_3)$. Determinare la matrice associata a g_h, rispetto alle basi canoniche.

4) Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $\phi_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla legge
$$\phi_h(x, y, z) = f_h(x, z, y, 0).$$

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Data la parabola Γ di equazioni $z = x^2 - 2y = 0$ e dato un punto $P(a, a^2/2, 0)$ di Γ, determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste un punto $P' \in \Gamma$ tali che le tangenti t_P e $t_{P'}$ a Γ in P e P' siano mutuamente perpendicolari.

2) Determinare l'equazione del cono Q contenente Γ con vertice nel punto $V = (0, 0, 1)$.

3) Determinare l'equazione della sfera tangente al piano $z = 0$ nel fuoco F della parabola Γ ed anche tangente al piano $z = 1$.

4) Mostrare che l'intersezione $Q_1 \cap Q_2$ delle quadriche $Q_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 - y - z + 1/4 = 0$ e $Q_2 : \ x^2 + 2yz - 2y = 0$ è una conica (contata due volte), e studiare la natura di questa conica.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 26 settembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Determinare l'insieme $S = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX - XA = B\}$.
2) Determinare la dimensione ed una base di $\mathscr{L}(S) \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$.
3) Studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$, definito dalla legge
$$f(X) = AX - XA$$
e determinare, se è possibile, una base di autovettori.
4) Studiare l'applicazione lineare $g : \operatorname{Im} f \to \mathbb{R}^{2,2}$, restrizione di f a $\operatorname{Im} f$.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare un sistema di equazioni dell'iperbole equilatera γ, avente fuoco in $O(0,0,0)$ e relativa direttrice la retta $x + 2y + 2 = x + z + 1 = 0$.
2) Determinare centro ed assi di simmetria di γ.
3) Determinare il cono Q di vertice $V(1,0,0)$, contenente γ.
4) Studiare il fascio di quadriche generato da Q e dalla superficie di equazione $x^2 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 novembre 2014

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

I

Denotiamo con e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonica di $\mathbb{R}^4$, con (x, y, z, t) le coordinate di un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^4$ e si consideri il sottospazio $V = \mathscr{L}(e_1, e_3, e_2 + e_4)$

1) Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $f_h : V \to \mathbb{R}^4$ definite da
$$f_h(e_1) = e_2 + (h+1)e_4, \ f_h(e_3) = he_1 + e_2 + e_4, \ f_h(e_2 + e_4) = e_1 + (h+1)e_3,$$
determinandone per ogni h le dimensioni di nucleo e immagine. Determinare inoltre il valore h_0 tale che $f_{h_0}(V) \subseteq V$.

2) Si considerino i sottospazi $U_1 = \mathscr{L}(e_1)$, $U_2 = \mathscr{L}(e_2 + e_4)$, $W_1(y = t = 0)$, $W_2(y - t = x = 0)$. Mostrare che
$$U_1 + W_2 = U_2 + W_1.$$

3) Determinare una base ortonormale di V.

4) Per il valore di h_0 determinato come nel quesito 1, studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $g : V \to V$, indotto da f_{h_0}.

II

Sia assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni dell'ellisse $\mathcal{E}$ con fuochi $F_1(-1, 0, 0)$, $F_2(1, 0, 0)$ e passante per $P(0, 0, 1)$.

2) Costruire e studiare il fascio di coniche passanti per $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ e $B(-\sqrt{2}, 0, 0)$ e tangenti nel punto $V(0, 1, 0)$ alla retta $y - 1 = z = 0$.

3) Determinare l'equazione del cono di vertice $V(0, 1, 0)$ e contenente l'ellisse $\mathcal{E}$.

4) Scrivere l'equazione del fascio di quadriche contenenti l'ellisse $\mathcal{E}$ e la conica Γ di equazioni $z = (\sqrt{2}x + 2y - 2)(\sqrt{2}x - 2y + 2) = 0$ e determinarne la quadriche spezzate.