Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 30 gennaio 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(a-b+c, b+c-d, 2a-3b+c+d, a+b+3c-2d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\},$$

il vettore $w_0 = (0,0,1,1)$ e sia $W = V + \mathscr{L}(w_0)$.

1) Calcolare la dimensione di V, una base di V ed un sistema di equazioni di W.

2) Sia $U_h = \mathscr{L}((0,1,1,1),(h,1,h,1))$, $h \in \mathbb{R}$. Determinare gli eventuali valori di h per cui $\dim_{\mathbb{R}}(U_h + V) < 4$.

3) Sia $\mathcal{F}$ la famiglia degli endomorfismi $f : W \to W$ tali che $f(V) \subseteq \mathscr{L}(w_0)$ e w_0 è autovettore associato all'autovalore -1. Studiare la diagonalizzabilità di tutte le applicazioni di $\mathcal{F}$.

4) Provare che per ogni $f \in \mathcal{F}$, $W = \operatorname{Ker} f \oplus \mathscr{L}(w_0)$. Sia $w = (4,-3,12,-1) \in W$. Determinare $w' \in \operatorname{Ker} f$ e $w'' \in \mathscr{L}(w_0)$, tali che $w = w' + w''$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.
Sia

$$\gamma_k : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 1 - k(x+y+1)^2 = 0 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}.$$

1) Dire per quali valori di k la conica γ_k è una ellisse reale.

2) Classificare γ_k al variare di k.

3) Sia k_0 il valore di k per cui γ_k è una iperbole equilatera. Determinare l'equazione del cilindro contenente γ_{k_0}, avente generatrici parallele alla retta $x-1=0$, $y-z=0$.

4) Determinare e studiare la quadrica contenente la conica di equazioni $y = x^2 + 6x + 1 = 0$, γ_{k_0} e passante per $P(0,1,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 26 febbraio 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri il sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + z + t = 0$ e si consideri la famiglia di endomorfismi $f_h : V \to V$ definiti da

$$f_h(x, y, z, t) = (hx + (h+1)y - z, hz, -y + ht, z)$$

1) Mostrare che f_h è ben definito, cioè che $f_h(V) \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e calcolare le dimensioni di $\ker f_h$ ed $\operatorname{Im} f_h$ al variare di h
2) Trovare l'insieme degli $h \in \mathbb{R}$ per cui gli endomorfismi f_h risultano diagonalizzabili.
3) Costruire una base ortonormale di $\operatorname{Im} f_1$.
4) Determinare una base del più piccolo sottospazio $U \subseteq V$ contenente tutti i sottospazi $\ker f_h$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato il piano Π di equazione $x + y + z = 0$ e la retta r di equazioni $y = x - 2z = 0$, trovare le equazioni della retta r' simmetrica di r rispetto a Π.
2) Riconoscere la conica γ di equazioni $x + y + z - 1 = 2(xy + xz + yz) - 4/9 = 0$ e calcolarne il centro.
3) Scrivere l'equazione del cono Γ di vertice nell'origine O e contenente la conica γ.
4) Determinare il fascio di piani paralleli che tagliano il cono precedente in circonferenze.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 12 aprile 2013
(appello per studenti ripetenti o fuori corso)

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro, sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 & 0 \\ 0 & h+1 & 1 & 0 \\ 1-h & 2h & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l' endomorfismo avente A_h come matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

1) Studiare f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\ker f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$.

2) Sia $V_h = \operatorname{Im} f_h \subseteq \mathbb{R}^4$. Determinare equazioni cartesiane di V_h e calcolare $f_h^{-1}((1,0,1,0))$.

3) Mostrare che $f_1(V_1) \subseteq V_1$ e studiare la diagonalizzabilità dell' endomorfismo $g : V_1 \to V_1$ indotto dalla restrizione di f_1 a V_1.

4) Calcolare $g^{-1}((1,-1,-3,-1))$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere l'equazione della parabola p avente vertice in $V = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, avente come asse di simmetria l' asse $\vec{x}$ e tangente alla retta di equazione $z = 0 = y - x$.

2) Scrivere l'equazione delle quadriche $Q \subset \mathbb{R}^3$ contenenti p, simmetriche rispetto al piano $y = 0$, passanti per $P = (1,1,1)$ e tali che il piano polare del punto $A = (1,0,0)$ abbia equazione $x = 0$.

3) Classificare le quadriche Q.

4) Sia Π il piano di equazione $x = z$. Riconoscere $Q \cap \Pi$ per ogni quadrica Q.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 25 giugno 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche (e_1, e_2, e_3), $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ è
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ h & h-1 & -1 \\ 1 & h+1 & h \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
con h parametro reale.

2) Determinare un sistema minimale di equazioni cartesiane per il sottospazio $\operatorname{Im} f_h + \mathscr{L}(A)$, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, al variare di h.

3) Sia $p : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla legge
$$p\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (y, x, x+y);$$
studiare la diagonalizzabilità di $f_h \circ p$ e di $p \circ f_h$.

4) Nel caso in cui $f_h \circ p$ ha un autovalore di molteplicità maggiore di 2, determinare $f_h^{-1}(V)$, dove $V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \operatorname{tr} X = 0\}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la famiglia Φ di parabole aventi vertice sulla retta di equazioni $z = x - y = 0$ e bitangenti alla conica γ di equazioni $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2) Per ogni $p \in \Phi$ (definita dalle equazioni $z = a^2(x-y)^2 + 2a(x+y) - 2a^2 - 1 = 0$, con $|a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$) sia V il suo vertice ed A il punto in cui si intersecano le tangenti comuni a p e γ. Determinare la distanza $\overline{AV}$ al variare di p.

3) Sia $p^* \in \Phi$ la parabola avente vertice sulla retta di equazioni $z = 8x - 9 = 0$. Determinare e studiare le proiezioni di p^* dal punto $Q(1, 1, 2)$ sul piano $x = 0$ e sul piano $x + z = 0$.

4) Determinare un sistema di equazioni della parabola q^*, simmetrica a p^* rispetto al piano $x + z + 1 = 0$. Determinare il vertice di q^*.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 16 luglio 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) Data la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{pmatrix}$, considerare l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ definita da $f_h(X) = A_h X$ (prodotto di matrici 2×2). Calcolare basi di nucleo e immagine al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) Studiare la semplicità di f_1.

3) Calcolare $f_h^{-1}(A_h)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$

4) Nei casi $h \neq 0$, trovare le matrici ortogonali X tali che $X^T A_h X = \begin{pmatrix} 1-h & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Trovare l' equazione della parabola nel piano $z = 0$ avente vertice in O e fuoco $F = (1, 1, 0)$. Trovare asse di simmetria e direttrice di questa parabola.

2) Trovare le equazioni delle sfere tangenti al piano $z = 0$ nel punto F e tangenti all'asse delle z. Determinare i centri ed il raggio di queste sfere.

3) Scrivere l' equazione del cono di vertice $V = (0, 0, 2\sqrt{2})$ e contenente la conica Γ di equazioni $z = (x - y)^2 - 8(x + y) = 0$.

4) Scrivere l' equazione della quadrica Q' simmetrica alla quadrica Q di equazione $(x - y)^2 + 2\sqrt{2}(x + y)z - 8(x + y) = 0$ rispetto al piano $x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 settembre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $h \in \mathbb{R}$ un parametro reale, sia

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ , \ x-y+z-t=0\} \subset \mathbb{R}^4$$

e sia $f_h : V \to V$ l' endomorfismo definito da:

$$\begin{array}{l} f_h(\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ) = (\ h-2\ ,\ h-1\ ,\ h\ ,\ h-1\ ) \\ f_h(\ 1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) = (\ h-2\ ,\ h-1\ ,\ -1\ ,\ -2\ ) \\ f_h(\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ) = (\ h+10\ ,\ 6\ ,\ 3\ ,\ h+7\ ) \end{array}.$$

a) Studiare f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\ker f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$.

b) Determinare, se esistono, i valori di h per cui f_h risulta diagonalizzabile.

c) Determinare, se esistono, i valori di h per cui $f_h^{-1}((0,0,-1,-1))$ contiene infiniti elementi.

d) Sia $U = \mathcal{L}((1,1,1,1),(1,1,0,0))$ e sia $U^\perp \subset \mathbb{R}^4$ il complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$. Determinare $U^\perp$ e basi ortonormali di U e $U^\perp$.

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

II

1. Scrivere l'equazione della parabola $C \subset \mathbb{R}^3$ avente fuoco $F=(1,1,1)$ e direttrice l' asse $\vec{z}$. Determinare la retta tangente a C nel suo vertice.

2. Sia $Q_{a,b} \subset \mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy - 4 = 0,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ parametri.

   a) Determinare i valori dei parametri per cui $Q_{a,b}$ risulta degenere e riconoscere tali quadriche.

   b) Determinare, se esistono, i valori di a e b per cui $Q_{a,b}$ risulta un ellissoide immaginario.

   c) Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $Q_{a,b}$ risulta un iperboloide iperbolico.

   d) Sia Π il piano di equazione $x = y$. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b} = Q_{a,b} \cap \Pi$ sia una parabola.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'1 ottobre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri il sottospazio $V = \mathscr{L}(1+x, 1+x^2, 1+x^3+x^4) \subset \mathbb{R}[x]_4$.

1) Determinare un sistema di equazioni cartesiane di V.

2) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio $W = \{f \in V \mid f' \in V\}$.

3) Studiare la diagonalizzabilità degli endomorfismi $\varphi : V \to V$ tali che $\varphi(W) \subseteq W$ e $2 + x^2 + x^3 + x^4 \in \operatorname{Ker} \varphi$.

4) Tra gli endomorfismi di cui al punto precedente, determinarne uno tale che $\varphi \circ \varphi = 0$. Scrivere la matrice ad esso associata rispetto alla base $\mathscr{B} = (1 + x^3 + x^4, 1 + x, 1 + x^2)$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sia r la retta di equazioni parametriche $x = h + 1$, $y = 2h + 1$, $z = 3h + 2$. Determinare un sistema di equazioni della circonferenza γ tangente ad r in $A(1, 1, 2)$ e passante per $O(0, 0, 0)$.

2) Determinare un sistema di equazioni della circonferenza tangente ad r in $B(0, -1, -1)$ e tangente anche a γ.

3) Sia p il piano su cui giace γ. Determinare il cilindro Γ avente vertice in direzione ortogonale a p e contenente γ.

4) Sia q il piano di equazione $x + z = 0$. Determinare e studiare il luogo dei punti Q dello spazio equidistanti da q e dal centro di γ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 6 dicembre 2013

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali e si consideri la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

1) Calcolare una base di autovettori dell' endomorfismo $j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali, la cui matrice associata rispetto alla base canonica è J.

2) Trovare una base, la dimensione ed un sistema di equazioni cartesiane indipendenti per il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^{2,2}$ definito da $V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AJ = JA\}$.

3) Studiare la diagonalizzabilità dell' endomorfismo $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ definito da $f(X) = J^{-1}XJ$.

4) Trovare il sottospazio $U^{\perp}$ ortogonale del sottospazio $U \subset \mathbb{R}^4$ definito da

$$U = \{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}^4\}.$$

II

1) In $\mathbb{R}^3$ si considerino le rette $r \equiv (z - 2 = x + y = 0)$ ed $s \equiv (x - y = x + y + z - 1 = 0)$. Trovare se esistono le rette l passanti per $O \equiv (0, 0, 0)$ e che intersecano r ed s. Dimostrare in generale che esiste sempre una sola retta complanare con due rette sghembe date e passante per un punto esterno ad entrambe.

2) Studiare la quadrica Q di equazione $2xy - z^2 = 0$ e scriverne una equazione in forma canonica.

3) Dimostrare che il fascio di piani paralleli al piano $x + y = 0$ interseca la quadrica Q in circonferenze.

4) Studiare le coniche ottenute intersecando Q con il fascio di piani $x + z + h = 0$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.