Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Giuffrida D)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 30 gennaio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si considerino la matrice
$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & h & -h \\ -h & 0 & h-1 \\ h & 1-h & 0 \end{pmatrix}$$
ed i vettori $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

1) Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base (e_1, e_2, e_3) è M_h, $h \in \mathbb{R}$. Determinare, al variare di h, $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$.

2) Sia f_h come al punto 1. Studiare la diagonalizzabilità di f_h.

3) Sia $g_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base $(e_2, e_1, e_1 + e_2 + e_3)$ è M_h, $h \in \mathbb{R}$ e sia f_h come al punto 1. Calcolare $f_h \circ g_h(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

4) Sia $\varphi_h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base (e_1, e_2, e_3) è M_h, $h \in \mathbb{C}$. Studiare la diagonalizzabilità di φ_h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la famiglia di coniche
$$\Phi : \begin{cases} z = 0 \\ 2(x-1)^2 + 2y^2 = k(x+y)^2 \end{cases} .$$

2) Sia $\gamma \in \Phi$ la conica passante per $(1,1,0)$. Scrivere le equazioni delle tangenti a γ parallele all'asse $\vec{x}$.

3) Determinare gli assi di simmetria di γ e tracciarne il grafico.

4) Sia $\delta \in \Phi$ la conica avente un asintoto parallelo all'asse $\vec{x}$. Scrivere l'equazione di un paraboloide contenente δ e passante per il punto di coordinate $(0,2,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettrica, Meccanica e Industriale (A–R)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 27 febbraio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

---

1. Sia
$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & h-1 & 1 \\ 1 & h & 1 \\ 1 & h-1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},$$
con $h \in \mathbb{R}$ un parametro. Studiare la diagonalizzabilità di A_h al variare di h, determinando per ogni valori di h gli autospazi dell' endomorfismo associato ad A_h.

2. Sia $L \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni cartesiane $x - y = 0 = y - z$ sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto alla retta L (f invia un vettore $\mathbf{v} = (x, y, z)$ nel vettore $f((x, y, x))$, dove $f((x, y, z))$ è il simmetrico di $\mathbf{v}$ rispetto alla retta L).
   (a) Calcolare $f((x, y, z))$;
   (b) determinare gli autovalori e gli autospazi di f.

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sia L_1 la retta di equazioni cartesiane $x = 0 = y$, sia L_2 la retta di equazioni cartesiane $x = 0 = z$ e sia L_3 la retta di equazioni cartesiane $z = 0 = y - 1$.
   (a) Disegnare L_1, L_2 e L_3.
   (b) Calcolare $d(L_1, L_3)$.
   (c) Sia $P = (1, 2, -1)$. Determinare l' unica retta passante per P e incidente L_1 e L_3.
   (d) Scrivere le equazioni delle quadriche di $\mathbb{R}^3$ contenenti la retta L_1.
   (e) Dimostrare che non esistono coni irriducibili o cilindri irriducibili contenenti le tre rette L_1, L_2 e L_3.
   (f) Riconoscere tutte le quadriche contenenti le tre rette L_1, L_2 e L_3.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Giuffrida D)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 maggio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri la matrice

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $S = \{A_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

1) Determinare $(A_{\alpha\beta})^{-1}$ per ogni α e $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Calcolare la dimensione ed una base del sottospazio di $\mathbb{R}^{3,3}$ generato da S.

3) Studiare la diagonalizzabilità di tutte le matrici in S.

4) Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è $A_{10} + h(A_{11})^{-1}$. Determinare una base ed un sistema di equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni delle sfere reali, di raggio r, contenenti la circonferenza

$$\mathcal{C}\colon\ z = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

2) Determinare le sfere contenenti $\mathcal{C}$ e tangenti al piano $x + y - 2 = 0$.

3) Classificare le coniche $\mathcal{D}_k\colon\ y + (1-k)z = x^2 + z^2 + 2kxz - 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4) Determinare le quadriche degeneri contenenti $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_1$, e calcolare i loro vertici.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettrica, Meccanica e Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 22 giugno 2012

1. Sono assegnati il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ e l' endomorfismo $f_h : V \to V$ dato da

$$\begin{array}{llllllllllllllll} f_h(& 1 & , & 0 & , & 0 & , & 1 &) = (& 1 & , & h & , & h+1 & , & 2 &) \\ f_h(& 0 & , & 1 & , & 1 & , & 0 &) = (& h & , & h & , & 0 & , & 0 &) \\ f_h(& 0 & , & 1 & , & 0 & , & -1 &) = (& -1 & , & 0 & , & -1 & , & -2 &) \end{array}$$

dove $h \in \mathbb{R}$ é un parametro reale.

   (a) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il nucleo di f_h, l'immagine di f_h e le loro dimensioni.

   (b) Discutere la diagonalizzabilitá di f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinando, quando esiste, una base di V formata da autovettori di f_h.

   (c) Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine del vettore $(-h, 0, h, 0) \in V$, cioé determinare
$$f_h^{-1}((-h, 0, h, 0)) = \{\mathbf{v} \in V \ : \ f_h(\mathbf{v}) = (-h, 0, h, 0)\}.$$

   (d) Stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esistono endomorfismi $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\varphi_h(\mathbf{v}) = f_h(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e tali che $\mathrm{Im}(\varphi_h) = V$.
   Per tali valori determinare tutti gli endomorfismi φ_h.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sia L_1 la retta di equazioni cartesiane $x - y = 0 = z + 1$ e sia L_2 la retta di equazioni cartesiane $x + y = 0 = z - 1$.

   (a) Determinare il piano Π passante per $R = (2, 2, 2)$ e parallelo a L_1 e L_2. Calcolare $d(L_1, \Pi)$ e $d(L_2, \Pi)$.

   (b) Determinare l' unica retta passante per R e incidente L_1 e L_2.

   (c) Riconoscere il luogo $Q = \{P \in \mathbb{R}^3 \ : \ d(P, L_1) = d(P, L_2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

   (d) Verificare che $R \in Q$ e determinare una retta L_3 passante per R e contenuta in Q.

3. Riconoscere al variare di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica $Q_k \subset \mathbb{R}^3$ di equazione
$$x^2 + 2kxy + y^2 + kz^2 - 2kz + 1 = 0.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Grasso F)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 9 luglio 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a+b-d & -d \\ -e & e & a+c+e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Provare che V è un sottospazio di $\mathbb{R}^{3,3}$ e calcolare una sua base costituita da matrici di rango massimo.

2) Provare che V è chiuso rispetto al prodotto di matrici.

3) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il nucleo e l'immagine dell'endomorfismo $f_h : V \to V$, definito dalla legge $f_h(X) = C_h X$, dove

$$C_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 1-h & -h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Studiare, al variare di h, la diagonalizzabilità di C_h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la quadrica

$$Q_k : \; x^2 - 2xy + 2xz + 2kyz + 2x + 2y + 2z = 0.$$

2) Studiare le sezioni irriducibili di Q_{-2} con i piani passanti per l' asse $\vec{z}$.

3) Determinare la retta tangente a Q_k in $O = (0,0,0)$, ortogonale alla retta $x - y + 1 = 3x + y + 2z + 2 = 0$.

4) Sia γ la sezione di Q_k con il piano di equazione $y = 0$. Determinare gli asintoti ed il centro di simmetria di γ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettrica, Meccanica e Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 10 settembre 2012

1. Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l' applicazione lineare definita da
$$f_h(x,y,z) = (x - hy,\ -hx + y,\ (h+1)x - 2hy + z,\ (1-h)y + z),$$
dove $h \in \mathbb{R}$ é un parametro reale.
   (a) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, equazioni cartesiane del nucleo e dell' immagine di f_h.
   (b) Calcolare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine tramite f_h del vettore $(-h,0,h,0) \in \mathbb{R}^4$, cioé determinare
$$f_h^{-1}((-h,0,h,0)) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ :\ f_h(\mathbf{v}) = (-h,0,h,0)\}.$$
   (c) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $g(x,y,z,t) = (x,y,t)$. Discutere la diagonalizzabilitá dell' endomorfismo $g \circ f_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2. Sia $L = \{(t,-t,t,-t),\ \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la riflessione rispetto alla retta L (f invia un vettore $\mathbf{v} = (x,y,z,t)$ nel vettore $f(\mathbf{v})$, dove $f(\mathbf{v})$ è il simmetrico di $\mathbf{v}$ rispetto alla retta L).
   (a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di f.
   (b) Calcolare $f((x,y,z,t))$;

3. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sia $V(1,1,0)$ e sia L la retta di equazioni cartesiane $x = 0 = y - z + 1$.
   (a) Determinare equazioni della parabola Γ avente vertice V e direttrice L.
   (b) Determinare l' equazione della sfera passante per l' origine $O(0,0,0)$ e tangente al piano contenente Γ nel vertice di Γ.

4. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Studiare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il fascio di coniche
$$C_k : \ \ x^2 + (k+1)y^2 - 2kx + 1 = 0 = z,$$
determinandone gli eventuali punti base, le coniche spezzate e quelle irriducibili (ellissi reali o immaginari, iperboli, parabole).

   Trovare l' equazione del cono Q_k contenente C_k e avente vertice nel punto di coordinate $(0,0,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettrica, Meccanica ed Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'1 ottobre 2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e siano $V = \{X \in \mathbb{R}^{3,2} \mid AX \in \mathscr{L}(I)\}$ ed $U = \{X \in \mathbb{R}^{3,2} \mid AX = 0\}$, dove I è la matrice identica in $\mathbb{R}^{2,2}$.

1) Calcolare le dimensioni di V ed U. Determinare una base di V che estende una base di U.

2) Caratterizzare gli endomorfismi non diagonalizzabili $f : V \to V$, tali che U è autospazio associato all'autovalore 2.

3) Determinare, se è possibile, una matrice invertibile $P \in \mathbb{R}^{3,3}$, tale che risulti diagonale la matrice $P\,{}^t\!AAP^{-1}$.

4) Calcolare $({}^t\!AA)^{101}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere l'equazione della parabola p avente vertice in $V(1,0,0)$, passante per $O(0,0,0)$, con asse di simmetria parallelo alla retta di equazioni $x + 2y = z = 0$.

2) Scrivere l'equazione della conica simmetrica a p rispetto alla sua tangente nel vertice.

3) Determinare e classificare la quadrica Q contenente p, contenente la conica $y = x^2 - x = 0$ e passante per $P(0, 1, \frac{1}{2})$.

4) Determinare le rette passanti per P e contenute in Q.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4/12/2012

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo la carta fornita, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

---

1. Sia
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z + t = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$
e sia $f_{h,k} : V \to V$, $h, k \in \mathbb{R}$ parametri, l' endomorfismo definito da
$$\begin{array}{l} f_{h,k}(\ 1\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ) = (\ h\ ,\ k-h\ ,\ 1-h-k\ ,\ h-1\ ) \\ f_{h,k}(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ -1\ ) = (\ 1-h\ ,\ h-1\ ,\ h\ ,\ -h\ ) \\ f_{h,k}(\ 0\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 0\ ) = (\ 1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ -1\ ) \end{array}.$$
   (a) Determinare equazioni cartesiane di Im $f_{h,k}$ al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

   (b) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $f_{h,k}$ risulta non iniettivo, studiare la diagonalizzabilità di $f_{h,k}$.

   (c) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la riflessione rispetto all' iperpiano V. Determinare $g((1, 1, 0, 1))$.

2. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Siano Π_1 il piano di equazione cartesiana $x - y + z - 1 = 0$, Π_2 il piano di equazione cartesiana $x + z = 0$ e sia $A = (1, 1, 1)$.

   (a) Determinare il punto A', simmetrico di A rispetto a Π_2, e il piano Π_1', simmetrico di Π_1 rispetto a Π_2.

   (b) Scrivere l'equazione della sfera S passante per A e tangente in $O = (0, 0, 0)$ al piano Π_2. Il piano Π_1 è tangente a S in A?

3. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sia Q_h la quadrica di equazione:
$$x^2 + 2(h - 1)xz - (h - 1)y^2 - z^2 + 2hx + 2hy = 0,$$
con $h \in \mathbb{R}$ parametro.

   (a) Riconoscere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la quadrica Q_h.

   (b) Determinare l' equazione del piano tangente a Q_h in $O = (0, 0, 0)$ per i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui risulta definito.