Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 31 gennaio 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

---

1. Si consideri l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $V = \left\{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \operatorname{tr} X = 0\right\}$ e sia $h \in \mathbb{R}$. Sia $f_h : V \to V$ l'endomorfismo avente $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ come autovettore relativo all'autovalore 2 e tale che
$$f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-h & 5-2h \\ 6-h & h-4 \end{pmatrix}, \quad f_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & 1 \\ -h & -h \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Ker} f_h$, $\operatorname{Im} f_h$ e dire quando f_h è suriettiva.
   (b) Discutere, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di f_h.
   (c) Determinare $f_h^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (d) Sia $U = \mathscr{L}(I, A, A^2) \subset \mathbb{R}^{2,2}$. Calcolare $\dim_{\mathbb{R}} U$, $U \cap V$ e $U + V$.

2. Si determini l'equazione della parabola Γ con vertice nel punto $V(1,0)$, avente come asse di simmetria l'asse $\vec{x}$ e tangente alla retta $x + y = 0$.

   Trovare il fuoco, la direttrice e una forma canonica di Γ.

   Sia $P(-1,1)$. Determinare le equazioni delle rette tangenti a Γ passanti per P.

3. Riconoscere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la quadrica Q_k di equazione
$$Q_k : \ (2-k)x^2 + 3y^2 - 4yz + 6kx + k + 1 = 0.$$
   Sia Π il piano di equazione $y - z = 0$ e sia $C_k = Q_k \cap \Pi$. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la conica C_k risulta irriducibile e per tali valori riconoscere C_k.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 2 marzo 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati i sottospazi di $\mathbb{R}^5$

$$U = \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x+y+z-4t-w=0,\ x+y+2z-7t+w=0,\ -x+3y+z-6t+2w=0,\ x+2y-z+t-2w=0\};$$

$$V_h = \mathscr{L}\big((0,1,h-1,1,3-h),(1,0,1,0,h-2)\big),\ h \in \mathbb{R};\ W = U + V_2.$$

1) Calcolare una base di U.

2) Determinare, al variare di h, la dimensione ed un sistema di equazioni di $U + V_h$.

3) Calcolare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare

$$f : W \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,t,w) = (x+y+z, t+w, x+y+z+t+w).$$

4) Determinare il generico endomorfismo non diagonalizzabile $g : W \to W$, tale che $f \circ g = 0$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.
Si considerino le coniche

$$C_1 \begin{cases} y^2+2yz-2z^2-1=0 \\ x=0 \end{cases},\quad C_2 \begin{cases} 2yz-2z^2+2y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

1) Classificare C_1 e C_2.

2) Determinare le quadriche irriducibili degeneri contenenti $C_1 \cup C_2$ e i loro vertici.

3) Verificare che $D(-2,-2,-1)$ è il centro di simmetria di C_2.

4) Calcolare le equazioni degli asintoti di C_2.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Grasso F)
Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 22 giugno 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0,\ 2y+kz+t=0\}, \\ W & = & \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (k-1)x+y=0,\ z-t=0\}, \end{array}$$

con k parametro reale.

1) Determinare i valori di k per cui la somma $V+W$ non è diretta e determinare, in tali casi, una base di $V \cap W$.

2) Nel caso $k=1$ sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che V è autospazio associato all'autovalore 0 e W è autospazio associato all'autovalore -1. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.

3) Calcolare una base di $f^{-1}(\mathscr{L}(u))$, con $u=(1,0,1,1)$.

4) Nel caso $k=0$, studiare la semplicità del generico endomorfismo

$$g : V+W \to V+W,$$

tale che $V \cap W \subseteq \operatorname{Ker} g$ e $W \subseteq \operatorname{Im} g$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale h, la famiglia di coniche

$$\gamma_h \begin{cases} (h-4)x^2+2hxy+(h-4)y^2+8hx-4h^2=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

2) Tracciare il grafico delle due coniche della famiglia passanti per $A(1,1,0)$.

3) Determinare equazioni della conica simmetrica a γ_4, rispetto al piano $\alpha:\ x+z=0$.

4) Determinare e studiare la proiezione di γ_4, sul piano α, dal punto $P(0,1,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Grasso F)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'11 luglio 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$ e siano

$$V_h = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A_h X = -X A_h\},\ U = \{A_1 X \mid X \in V_{-1}\},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calcolare la dimensione ed una base di V_h al variare di h.

2) Determinare la dimensione di $V_h + U$, al variare di h.

3) Sia $W = \{X \in V_{-1} \mid XC$ è multiplo di $C\}$. Studiare la diagonalizzabilità delle matrici di W.

4) Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $f : V_1 + V_{-1} \to \mathbb{R}^{2,2}$, definita dalla legge
$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 2x-y & -x \end{pmatrix}.$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la quadrica
$$Q_k : x^2 + y^2 + kz^2 - 2xz - 4yz + 2z - 1 = 0,$$
determinandone gli eventuali vertici.

2) Classificare le sezioni di Q_4 con i piani passanti per l'asse $\vec{x}$.

3) Calcolare il valore di k per cui Q_k contenga una iperbole γ avente un asintoto parallelo alla retta di equazioni $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y - 6z + 19 = 0 \end{cases}$ e passante per i punti di coordinate $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$.

4) Determinare gli asintoti ed il centro di simmetria di γ.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Grasso F)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** dell'8 settembre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

---

1. Assegnata la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$, si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_h(\mathbf{v}_1) = (2, -h, h), \;\; f_h(\mathbf{v}_2) = (0, h, 2-h), \;\; f_h(\mathbf{v}_3) = (h-1, 0, h-1),$$

con $h \in \mathbb{R}$ parametro.

   (a) Studiare f_h al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando $\operatorname{Ker} f_h$ e $\operatorname{Im} f_h$.

   (b) Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ la diagonalizzabilità di f_h.

   (c) Determinare $f_h^{-1}(0, 1, 1)$ ed equazioni cartesiane dei sottospazi $U = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $V = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2)$.

2. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2kxy + 2x + 2y = 0 = z, \; k \in \mathbb{R}.$$

   (a) Studiare il fascio determinandone i punti base e le coniche spezzate.

   (b) Descrivere geometricamente il fascio (per esempio: fascio di coniche passante per .... e .... e....).

   (c) Determinare l'asse della parabola del fascio. Disegnare e determinare la forma canonica della parabola del fascio.

   (d) Scrivere l'equazione del cono contenente la parabola del fascio e avente vertice nel punto $V = (0, 0, 1)$.

3. In $\mathbb{R}^3$ si considerino il piano Π_1 di equazione $x + y = 0$, il piano Π_2 di equazione $y + z - 1 = 0$ e la retta l di equazioni cartesiane $x = y = 0$.

   (a) Riconoscere il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti da Π_1 e Π_2.

   (b) Riconoscere il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti da Π_2 e l.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Industriale (A-Grasso F)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 6 ottobre 2011

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z + t = 0\},\ V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + 3t = 0\}.$$

1) Studiare la diagonalizzabilità degli endomorfismi $f : U \to U$, tali che $f(u) = -u$ per ogni $u \in U \cap V$.
2) Nel caso in cui $(1,1,1,2) \in \operatorname{Ker} f$, determinare una base di autovettori di U.
3) Sia $W_h = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid h(x+2t) - x + 3y = 0\}$. Nel caso in cui $(1,1,1,2) \in \operatorname{Ker} f$, calcolare la dimensione ed una base di $f^{-1}(U \cap V \cap W_h)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
4) Calcolare una base ortogonale di $U^\perp + V^\perp$, rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare le equazioni dei due paraboloidi P_1 e P_2 contenenti entrambe le coniche

$$x = y^2 + 2yz + 2z^2 + 2z - 16 = 0; \quad y = x^2 + 2xz + 2z^2 - 16x + 2z - 16 = 0.$$

Dire di che tipo di paraboloidi si tratta.

2) Disegnare il grafico delle sezioni di P_1 e P_2 con il piano $z = 0$.
3) Sia γ_1 la circonferenza di cui al punto precedente. Determinare le rette reali tangenti sia a γ_1 che a γ_2: $z = x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0$.
4) Scrivere l'equazione dell'iperbole con asintoto parallelo all'asse $\vec{x}$ e bitangente a γ_2 nei punti in cui essa incontra la retta $z = 2x - y = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Elettrica, Meccanica, Informatica e Industriale

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 6 dicembre 2011
APPELLO PER RIPETENTI O FUORI CORSO

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.

---

1. Sono assegnati il sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \mid x - z + t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$M(f_h) = \begin{pmatrix} 2 & 1-h & h-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & -2h & 2h-4 & 2 \\ 4 & -1-h & h-3 & 2 \end{pmatrix}, \quad h \text{ parametro reale.}$$

   (a) Studiare f_h al variare di h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f_h$ e $\operatorname{Ker} f_h$. Verificare che $\operatorname{Im} f_h \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$ e precisare in quali casi si ha l'uguaglianza.

   (b) Determinare il valore di h per cui $f_h^{-1}(1, 17h - 21, h - 1, 1) \neq \emptyset$.

   (c) Sia $\varphi_h : V \to V$ l'endomorfismo indotto da f_h. Studiare φ_h al variare di h, determinando nei vari casi $\operatorname{Im} \varphi_h$ e $\operatorname{Ker} \varphi_h$.

   (d) Verificare che $T = 2$ è autovalore di φ_h per ogni $h \in \mathbb{R}$. Verificare che φ_h è diagonalizzabile per ogni valore di h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.

2. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

   (a) Determinare la circonferenza γ sul piano $z = 0$ avente per diametro il segmento di estremi $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$. Trovare il cono Q contenente Γ e avente per vertice il punto $C = (1, 1, 1)$ e il cilindro Q' contenente Γ e avente direzione parallela a $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Verificare che l'intersezione $Q \cap Q'$ delle due quadriche è l'unione di due circonferenze.

   (b) Sul piano $z = 0$ determinare la circonferenza γ' di centro $D = (1, 1, 0)$ e raggio $r = 1$; determinare la parabola π, con asse parallelo all'asse $\vec{y}$, avente vertice di coordinate $V = (1, 0, 0)$ e passante per il punto $E = (3, 4, 0)$. Studiare il fascio di coniche generato da γ' e π, determinandone in particolare i punti base e le coniche spezzate.

   (c) Studiare, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, la famiglia di quadriche $Q_h \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$x^2 + y^2 + 2hyz + (1-h)z^2 - 2hx = 0.$$