Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 27 Gennaio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Sia $V = \{f \in \mathbb{R}[x]_5 \mid f(A) = 0\}$. Calcolare la dimensione ed una base di V.

3) Sia $W_k = \{f \in \mathbb{R}[x]_5 \mid f \text{ è multiplo di } x^3 - x^2 - x + k\}$. Determinare una base di $V \cap W_k$, al variare di k.

4) Sia $p = (x-1)^3$. Determinare gli autospazi dell'endomorfismo $\varphi : V \to V$, la cui matrice associata rispetto alla base (p, xp, x^2p) è $A + A^{-2}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la parabola p avente fuoco in $F(1,2,1)$ e direttrice $x + y + 1 = x + z + 2 = 0$.

2) Determinare il vertice e l'asse di simmetria di p.

3) Classificare la proiezione γ di p dal punto $A(0,0,1)$ sul piano $z = 0$.

4) Determinare la conica simmetrica a γ rispetto al punto $B(0,1,0)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 2 Marzo 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1+i, 1-i, 1+i), v_2 = (i-1, 1+i, i-1), v_3 = (1,1,2), v_4 = (3i-2, 2+i, 3i-3)$$

e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1) Determinare la dimensione ed un sistema di equazioni cartesiane di V.

2) Sia $iV = \{iv \mid v \in V\}$. Calcolare la dimensione ed una base di $V \cap iV$.

3) Sia $f : V \to \mathbb{R}^{2,2}$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = \begin{pmatrix} x+y+2z & 2kx+y+(2k+1)z \\ x+2y+kz & -x+2y+z \end{pmatrix}.$$

Determinare una base del nucleo e dell'immagine di f al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

4) Determinare i valori di k per cui $I \in \operatorname{Im} f$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale h, la quadrica

$$Q_h : 3x^2 + 4xy + 2y^2 + hz^2 - 8x - 6y + 4 = 0.$$

2) Classificare la sezione γ di Q_h con il piano $z = 0$; determinare i punti reali A e A' di γ di ordinata massima e minima rispettivamente; calcolare il polo B (rispetto a γ) della retta di equazioni $z = 4x + 3y - 4 = 0$.

3) Determinare la retta tangente in $C(1,0,1)$ alla circonferenza δ passante per A, B e C.

4) Detto r il raggio di δ, determinare le sfere contenenti δ di raggio $\sqrt{2}r$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

Corso di Laurea in **Ingegneria Meccanica, Elettrica e Informatica (G–Q)**

Prova scritta di *Algebra Lineare e Geometria* assegnata il 9/04/2010

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, sia $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di V, sia $f_h : V \to V$ definita da

$$\begin{array}{rcrrr} f_h(\mathbf{v}_1) & = & \mathbf{v}_1 & +2\mathbf{v}_2 & +(h+1)\mathbf{v}_3 \\ f_h(\mathbf{v}_2) & = & -\mathbf{v}_1 & -2\mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 \\ f_h(\mathbf{v}_3) & = & 2\mathbf{v}_1 & +2\mathbf{v}_2 & +(2-h)\mathbf{v}_3 \end{array}$$

con $h \in \mathbb{R}$ parametro reale.

(a) Studiare, al variare del parametro h, l'endomorfismo $f_h : V \to V$ determinando $\operatorname{Im} f_h$, $\ker f_h$, la suriettività e l'iniettività di f_h.

(b) Calcolare $f_h^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = \{\mathbf{v} \in V \ : \ f_h(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$.

(c) Studiare, al variare di h, la diagonalizzabilità di f_h.

(d) Determinare, quando possibile, una base di V formata da autovettori di f_h.

2. In $\mathbb{R}^3$ sia $F = (1, 0, 1)$, sia $\mathbf{r}$ la retta di equazioni cartesiane $x + y + 1 = 0 = x - z + 1$ e sia $\mathbf{s}$ la retta di equazioni cartesiane $y - 2z - 1 = 0 = x + z + 1$. Determinare

(a) la retta passante per F e incidente $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$;

(b) l'ellisse avente fuoco F, direttrice relativa a F la retta $\mathbf{r}$ ed eccentricità $\frac{3}{4}$.

3. Sia Q_k la quadrica di equazione $x^2 + 2kxy + y^2 + kz^2 + 2x - 2ky = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare, al variare del parametro reale k, la quadrica Q_k.
Sia Π il piano di equazione $z = 0$ e sia $C_k = Q_k \cap \Pi$.

(b) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che C_k risulti una conica riducibile.

(c) Riconoscere la conica C_k per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui è irriducibile.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 29 Giugno 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R},$$

e sia

$$V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid XAB = BAX\}.$$

1) Determinare, al variare di h, la dimensione ed una base di V.

2) Stabilire, al variare di h, se la matrice AB è simile alla matrice BA e, in caso affermativo, determinare una matrice invertibile P tale che $PABP^{-1} = BA$.

3) Nel caso $h = -2$, sia $W = \mathscr{L}\left(A^2, B^2\right)$. Calcolare una base di $V \cap W$.

4) Nel caso $h = -2$, determinare il generico endomorfismo $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ tale che $V \subseteq \operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f = \mathscr{L}(AB - BA)$, quindi studiarne la semplicità.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare e studiare il fascio Φ di coniche tangenti in $A(0,1,0)$ all'asse $\vec{y}$ ed aventi come asse di simmetria la retta di equazioni $z = x + 2y = 0$.

2) Sia $\gamma_1 \in \Phi$ l'iperbole con un asintoto parallelo alla retta $z = x - y + 17 = 0$; determinare gli asintoti di γ_1 e la misura degli angoli da essi formati.

3) Sia $\gamma_2 \in \Phi$ la circonferenza e sia r il suo raggio. Determinare la sfera S con centro nel semispazio $z > 0$, contenente γ_2, di raggio $\sqrt{10}r$.

4) Sia α il piano tangente ad S in A. Studiare il fascio di quadriche generato da S e dal piano α contato due volte.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 15 Luglio 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si consideri la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 10 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 5 & -1 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

e siano $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gli endomorfismi le cui matrici associate, rispetto alle basi canoniche, sono rispettivamente M e ${}^tM$.

1) Dopo aver verificato che 1 è autovalore per i due endomorfismi, calcolare $V_{f,1} \cap V_{g,1}$, dove $V_{f,1}$ e $V_{g,1}$ sono gli autospazi associati all'autovalore 1 per f e g rispettivamente.

2) Dimostrare che f è semplice e determinare una base di $\mathbb{R}^4$ di autovettori.

3) Sia $W_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + (h+1)y - z - (h+3)t = 0,\ h \in \mathbb{R}\}$. Determinare i valori di h per cui la restrizione di f a W_h è iniettiva.

4) Sia $W = \bigcap_{h \in \mathbb{R}} W_h$. Determinare $g(W)$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la quadrica

$$Q_k : \ (2k+1)x^2 + 2kxy + (5k+4)y^2 + 4kxz + 4kyz + 4kz^2 + 2kx + 2ky + 4kz - 1 = 0.$$

2) Determinare i piani contenenti l'asse $\vec{x}$ che secano Q_0 in circonferenze.

3) Sia γ_0 la sezione di Q_0 con il piano $z = 0$. Determinare la conica spezzata nelle rette passanti per $A(2, 1, 0)$ e tangenti a γ_0.

4) Sia γ_1 la sezione di Q_0 con il piano $z = 1$. Determinare l'equazione ed il vertice del cono contenente γ_0 e γ_1.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 8 Settembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-h \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare $\operatorname{Im} f_h$ e $\operatorname{Ker} f_h$ al variare di h.

2) Studiare la diagonalizzabilità di f_2.

3) Calcolare $f_0^{-1}(\operatorname{Im} f_2)$.

4) Determinare la matrice associata a f_h rispetto alla base

$$\big((1,0,0,0),(0,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,0)\big).$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare il centro ed il raggio della circonferenza γ passante per i punti

$$(2,0,0),(0,2,0),(0,2,2).$$

2) Determinare l'equazione della sfera contenente γ con centro sul piano di equazione $x+y+z+1=0$.

3) Classificare, al variare del parametro reale k, la conica

$$\delta_k : \ kx+y+z = 2y^2+z^2-4y-2z = 0.$$

4) Scrivere l'equazione del paraboloide contenente γ e δ_1.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 24 Settembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonica dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalle assegnazioni

$$\begin{array}{rcl} f_k(2e_1) & = & (6-k)e_1 + (2-k)e_3 + (2-k)e_4 \\ f_k(e_2) & = & 4e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4 \\ f_k(2e_3) & = & (k-2)e_1 + (k+2)e_3 + (k-2)e_4 \\ f_k(e_4) & = & (k-2)e_1 + (k-2)e_3 + ke_4 \end{array}$$

con k parametro reale.

1) Provare che 2 è un autovalore di f_k per ogni k e determinarne l'autospazio associato.

2) Studiare la diagonalizzabilità di f_k al variare di k.

3) Dire se la somma $\mathrm{Ker}\, f_0 + \mathrm{Im}\, f_0$ è diretta.

4) Sia V la somma degli autospazi di f_1. Determinare una base di $V \cap \mathrm{Im}\, f_0$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche tangenti all'asse $\vec{x}$ in $A(2,0,0)$ ed all'asse $\vec{z}$ in $B(0,0,1)$.

2) Determinare l'iperbole γ del fascio avente un asintoto parallelo alla retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 2x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases},$$

e scrivere sistemi di equazioni dei suoi asintoti r_1 ed r_2.

3) Scrivere l'equazione della quadrica riducibile contenente $r_1 \cup r_2$, passante per $P(0,1,1)$ e non passante per B.

4) Sia $p \in \Phi$ la parabola. Classificare la conica proiezione di p sul piano $z = 0$, dal punto P.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del 4 Dicembre 2010

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si considerino in $\mathbb{R}^{2,2}$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e siano $U = \mathscr{L}(A, A^2)$ e $W = \mathscr{L}(B, B^2)$.

1) Diagonalizzare, se è possibile, la matrice A.

2) Determinare equazioni cartesiane di $U + W$ e $U \cap W$.

3) Determinare la matrice associata, rispetto alla base (I, A, B), all'endomorfismo

$$f : U + W \to U + W$$

tale che $B^{-1} \in \operatorname{Ker} f$, $f(B) = I + hA^2$ e $f(A) = I + hB^2$, $h \in \mathbb{R}$.

4) Calcolare una base di $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ al variare di h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
Si consideri il fascio di coniche

$$\gamma_k \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + k = 0 \\ x + y + 2z - 6 = 0 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare per quali valori di k la conica γ_k ha punti reali.

2) Per i valori di k di cui sopra determinare il centro ed il raggio di γ_k.

3) Sia δ la conica del fascio passante per $P(2, 0, 2)$. Determinare la conica δ' simmetrica a δ rispetto al piano $x - z = 0$.

4) Determinare e classificare la quadrica contenente δ, tangente al piano $z = 0$ nell'origine e passante per il punto improprio dell'asse $\vec{z}$.