Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (A-F), (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 26 Gennaio 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla legge

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + ht, y + z, -y - z - ht, hy)$$

dove h è un parametro reale.

1) Determinare, al variare di h, il nucleo di f, l'immagine di f e le loro equazioni cartesiane.
2) Nel caso in cui non è un isomorfismo dire se f è semplice.
3) Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + ky + z = 0\}$, con k parametro reale; determinare il valore di k per cui f induce un endomorfismo φ di V.
4) Verificare che φ non è mai semplice.
5) Determinare, al variare di h, la controimmagine, mediante φ, del vettore $(0, 3, -3, 0)$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare equazioni della retta r passante per $A(1, 0, 0)$, parallela al piano di equazione $x - y + 3z = 0$ e complanare alla retta di equazioni $x - z + 1 = y - 2z - 2 = 0$.
2) Determinare e studiare il fascio Φ di coniche passanti per $O(0, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ e simmetriche rispetto alla retta di equazioni $z = x + y = 0$.
3) Determinare il vertice, l'asse di simmetria e l'equazione canonica dell'unica parabola in Φ.
4) Scrivere l'equazione del cilindro con direttrici parallele alla retta r e contenente la conica γ di equazioni $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$.
5) Calcolare l'equazione della sfera contenente γ e passante per il punto di coordinate $(0, 1, 1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (A-F), (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 17 Febbraio 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano

$$V = \{f \in \mathbb{R}[x]_4 \mid f(1) = f'(1),\, f(-1) = 2f'(1)\},$$

e

$$W = \mathscr{L}(x - x^2 + (2h+3)x^3 - x^4, 1 + x^4),$$

con h parametro reale.

1) Calcolare la dimensione ed una base di V.
2) Determinare il valore di h per cui la somma $V + W$ non è diretta.
3) Nel caso $h = 0$ determinare e studiare il generico endomorfismo φ di $\mathbb{R}[x]_4$, tale che $\varphi(v) = 2v$ per ogni $v \in V$, $\varphi(W) \subseteq W$ e $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \varphi \geq 1$.
4) Studiare la semplicità di φ.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare e studiare il fascio delle coniche che hanno come asintoti le rette di equazioni $z = x + y = 0$ e $z = x - 3 = 0$.
2) Determinare l'eccentricità della generica conica del fascio.
3) Sia γ la conica del fascio tangente all'asse $\vec{x}$. Determinare i punti di γ la cui tangente è parallela alla retta di equazione $z = 5x - 4y = 0$.
4) Determinare l'equazione del cilindro contenente γ, con generatrici perpendicolari alle due rette di equazioni $x + y + 2z + 1 = 2x - y - z - 93 = 0$ e $x + 2y - 19 = 2x + z + 23 = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 16 Marzo 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori

$$v_1 = (-1,1,1,1),\ v_2 = (1,1,1,0),\ v_3 = (1,-1,0,0),\ v_4 = (-1,0,0,0),\ w = (0,2,-2,-1),$$

e sia $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Sia inoltre $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5h-1 & -3h-4 & -2h-3 & 3h+2 \\ 6h & h & h & h \\ h & 2h & -h & 4h \\ h & 2h & -h & 4h \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathscr{B}$.

1) Determinare una base di $\operatorname{Im} f$, al variare di h.

2) Sia $W = \mathscr{L}(w)$. Calcolare la dimensione di $f^{-1}(W)$, al variare di h.

3) Nel caso $h = 1$, calcolare $f(V) \cap V$, dove $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3z = 0\}$.

4) Nel caso $h = -1$, dire se la matrice M è diagonalizzabile.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la quadrica Q_k di equazione

$$Q_k :\ x^2 + 2y^2 + k(x-z)^2 + (3-k)(z+1)^2 = 0.$$

2) Classificare le sezioni di Q_{-2} con i piani contenenti l'asse $\vec{y}$.

3) Sia π il piano contenente gli assi $\vec{x}$ e $\vec{z}$. Determinare il centro di simmetria di $\gamma = \pi \cap Q_{-2}$.

4) Scrivere le equazioni della conica simmetrica a γ rispetto al punto $P(2,1,1)$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 23 Giugno 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,1),\ v_3 = (-2,1,-1),\ v_4 = (1,2,1).$$

1) Calcolare la matrice M associata, rispetto alla base canonica, all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che v_1, v_2, v_3 sono autovettori e $f(v_4) = (3,5,3)$.

2) Diagonalizzare M.

3) Determinare il generico endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathscr{L}(v_1, v_2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(g \circ f) = \mathscr{L}(v_2).$$

4) Calcolare $g^{-1}(W)$, dove $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 2z = 0\}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la lunghezza della circonferenza γ passante per i punti $A(0,0,0)$, $B(1,-2,-1)$, $C(-1,0,-1)$.

2) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(1,0,0)$, contenente γ.

3) Determinare la sfera contenente γ, con centro sul piano di equazione $x + y + z - 1 = 0$.

4) Determinare gli eventuali paraboloidi contenenti γ e la conica di equazioni

$$z = y^2 + x + 2y = 0.$$

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 14 Luglio 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Si considerino le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_2[x]$, così definita

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a - d + (a+b)x + (c+d)x^2,$$

e $g : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2,2}$, così definita

$$g(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} c-a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}.$$

1) Detta $\mathscr{E} = (1, x, x^2)$, base di $\mathbb{R}_2[x]$ ed $\mathscr{F}$ la base standard di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare $M^{\mathscr{F},\mathscr{E}}(f)$ ed $M^{\mathscr{E},\mathscr{F}}(g)$.
2) Studiare f e g determinando per ciascuna di esse una base del nucleo e dell'immagine.
3) Sia
$$A = \begin{pmatrix} h & -1 \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcolare $g^{-1}(A)$, al variare del parametro reale h.
4) Studiare la semplicità di $f \circ g$ e $g \circ f$; nel caso in cui siano semplici determinare una base di autovettori.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare equazioni della retta r passante per l'origine, complanare alla retta $x - y + z = x - 1 = 0$ e parallela al piano $2x - 2y + 3z - 1 = 0$.
2) Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per $A(0, 2, 0)$, $B(-2, 0, 0)$ e tangenti in O ad r.
3) Detta Γ l'unica parabola del precedente fascio, determinare e studiare la quadrica contenente Γ, passante per $C(0, 2, -2)$, $D(-2, 0, -6)$, $E(0, 1, 1)$ e tangente in O al piano di equazione $x - y + z = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 8 Settembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \{X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid X = {}^tX,\ \operatorname{tr} X = 0,\ \operatorname{tr}(XA) = 0\}.$$

1) Determinare una base di V.

2) Sia $U = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3,3} \mid a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0\}$. Determinare e studiare il generico endomorfismo $f : V \to V$ tale che $U \cap V \subseteq \operatorname{Ker} f$ e $f^2 = 0$.

3) Studiare la diagonalizzabilità del generico f.

4) Sia
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Determinare gli interi positivi n per cui $B^n \in V$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare e studiare il fascio di coniche, giacenti sul piano di equazione $z = 0$, aventi centro di simmetria in $A(1, 0, 0)$ e vertice in $B(0, 2, 0)$.

2) Sia γ la conica del fascio con asintoto parallelo all'asse $\vec{y}$. Determinare una sua equazione canonica.

3) Calcolare un sistema di equazioni della conica γ', simmetrica a γ rispetto alla retta $x = y = z$.

4) Determinare la proiezione ortogonale di γ sul piano di equazione $x - 2z = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 28 Settembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ sono assegnati i vettori $v_1 = x^2 + 1$, $v_2 = x^2 + x$, $v_3 = x$ e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definito dalle seguenti relazioni

$$f(v_1) = 1 - x, \qquad f(v_2) = x^2 - 1, \qquad f(v_3) = x - 1.$$

1) Studiare f, determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.
2) Detta $d : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ l'usuale derivazione, calcolare gli autospazi dell'endomorfismo $\varphi = f + d$.
3) Posto $w_1 = 3x^2 - 2x + 4$ e $w_2 = 3x^2 + x - 4$, calcolare $f^{-1}(w_1)$, $f^{-1}(w_2)$, $\varphi^{-1}(w_1)$ e $\varphi^{-1}(w_2)$.
4) Diagonalizzare, quando è possibile, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & h \end{pmatrix}.$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Studiare il fascio Φ di quadriche

$$x^2 + y^2 - kz^2 + 2(k+1)xy + x = 0,$$

determinando in particolare l'unico cilindro Γ_1, l'unico paraboloide Γ_2 e l'unica sfera S di Φ.

2) Determinare il vertice di Γ_1.
3) Determinare centro e raggio della circonferenza ottenuta secando S con il piano di equazione $x - y + z = 0$.
4) Scrivere l'equazione di un piano che interseca Γ_2 in una parabola.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)
CdL in Ingegneria Meccanica (Lo-To)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 17 Novembre 2009

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (0,1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (1,0,0,1)$ e sia $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Sia inoltre $f_h : V \to V$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base $\mathscr{B}$ è

$$M_h = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

1) Determinare, al variare di h, il nucleo e l'immagine di f_h.

2) Studiare la diagonalizzabilità di f_h al variare di h e nel caso $h = 1$ determinare gli autospazi.

3) Sia $W = \operatorname{Im} f_2$. Determinare gli eventuali valori di h per cui $f_{h|W}$ è iniettiva.

4) Dire se M_1 è simile alla matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la circonferenza γ con centro sulla retta di equazione $z = x - y - 2 = 0$, tangente all'asse $\vec{x}$ ed alla retta di equazione $z = 3x - 4y = 0$ e giacente interamente sul primo quadrante del piano $z = 0$.

2) Determinare la conica, di eccentricità $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$, complanare a γ, avente fuochi in $O(0,0,0)$ e nel centro di γ.

3) Classificare la conica δ di equazioni $x - y = 2x^2 + 2yz - 8x + 9 = 0$.

4) Studiare le quadriche contenenti le coniche γ e δ.