CdL in Ingegneria Informatica (A-F), (G-S)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 29 Gennaio 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 1 \\ -1 & h & 0 & -4 \\ 0 & -1 & h & 6 \\ 0 & 0 & -1 & h-4 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

1) Studiare f al variare di h.

2) Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$. Determinare le equazioni cartesiane di $f(V)$ al variare di h.

3) Per $h = 1$, studiare la semplicità di f.

4) Nel caso $h = 0$ determinare la matrice associata a f^{-1} rispetto alla base

$$\mathscr{B} = \big((0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\big).$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare l'equazione dell'iperbole γ avente il centro sulla circonferenza di equazioni $z = x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$, tangente in $A(3, 1, 0)$ alla retta di equazioni $z = x - 3y = 0$ e in $B(0, 2, 0)$ all'asse $\vec{y}$.

2) Determinare l'eccentricità di γ.

3) Provare che γ non ha punti reali a tangente orizzontale.

4) Determinare e classificare la proiezione di γ sul piano $x - y = 0$, dal punto $P(0, 1, 1)$.

CdL in Ingegneria Informatica (G-S)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 26 Febbraio 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid {}^t(EX) = EX,\ \mathrm{tr}(EX) = 0,\ \mathrm{tr}(EXF) = 0 \right\}$, dove

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calcolare la dimensione ed una base di V.

2) Studiare, al variare del parametro reale h, l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}[x]_2$ definita dalla legge
$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Nel caso $h = 1$, determinare una base di $W = f^{-1}\left(\mathscr{L}(1 + x^2, x + x^2)\right)$.

4) Dopo aver verificato che la funzione $g(X) = {}^tX$ definisce un endomorfismo $g : V \to V$, studiare la semplicità di g.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
Sia Γ la famiglia di coniche

$$\Gamma \begin{cases} x^2 - hy^2 - 2x - 1 = 0 \\ (h+7)y + z = 0 \end{cases}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

1) Determinare le circonferenze in Γ.

2) Detta $\gamma \in \Gamma$ la circonferenza sul piano $2y + z = 0$, determinare l'equazione della sfera S, contenente γ, passante per $P(1, 0, 1)$.

3) Determinare l'equazione del piano p, tangente a S in P.

4) Proiettare γ sul piano $z = 0$ dalla direzione ortogonale a p.

CdL in Ingegneria Informatica (G-S)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 15 Aprile 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) Dopo aver provato che $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \mid p(i) = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]_4$, calcolarne la dimensione ed una base.

2) Sia $\zeta : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_4$ l'endomorfismo la cui matrice associata, rispetto alla base $\mathscr{E} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$, è

$$\mathfrak{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & h-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & h-1 & h-4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale. Provare che ζ induce su W un endomorfismo $\varphi : W \to W$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

3) Studiare la semplicità di φ.

4) Nel caso $h = 0$, calcolare $\varphi^{-1}(V)$, dove $V = \{p \in W \mid p'(1) = 0\}$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Classificare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la conica γ di equazioni

$$2x - y = 5x^2 + 6xz + kz^2 - 10x + 4z = 0.$$

2) Nel caso $k = -3$, determinare e studiare la proiezione γ' di γ sul piano $z = 0$, dal punto $V(0, 1, 1)$.

3) Calcolare l'equazione della parabola p del piano $z = 0$ che iperoscula γ' nel punto $A(2, 0, 0)$.

4) Calcolare l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del fuoco di p.

Università degli Studi di Catania

CdL in Ingegneria Informatica (G-S)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 19 Giugno 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gli endomorfismi tali che

$$\mathfrak{M}^{\mathscr{E},\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 7 & -7 \\ 8h & -6h & 6h \end{pmatrix},$$

dove h è un parametro reale, $\mathscr{E}$ è la base canonica e $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$, con

$$v_1 = (0,0,1), \;\; v_2 = (2,1,0), \;\; v_3 = (1,1,1).$$

1) Studiare l'endomorfismo $\varphi = g \circ f$, al variare di h.
2) Studiare la semplicità di φ al variare di h.
3) Nel caso $h = 1$ determinare $W = \varphi^{-1}\left(\mathscr{L}\left((4,3,2)\right)\right)$.
4) Nel caso $h = 1$ calcolare una base dello spazio $\operatorname{Im} g \cap W$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare equazioni della circonferenza γ inscritta nel triangolo di vertici

$$A(4,2,0), \;\; B(-2,5,0), \;\; C(-6,-3,0).$$

2) Determinare equazioni della parabola p tangente a γ in $P(-2,0,0)$ ed in $Q(1,3,0)$.
3) Detta γ' la conica simmetrica di γ rispetto al punto Q, studiare il fascio generato da γ e γ'.
4) Determinare le equazioni dei paraboloidi contenenti γ e la conica $y = x^2 + 9z^2 + 2x = 0$.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 10 Luglio 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 1-h \\ 0 & 0 & 1-h & 1+h \end{pmatrix}$$

la matrice associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, rispetto alle basi canoniche, con h parametro reale.

1) Studiare f al variare di h, determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2) Posto $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\}$, verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo $g : V \to V$, che non dipende da h.

3) Verificare che f è semplice per ogni valore di h.

4) Diagonalizzare A nel caso in cui f ammette un autospazio di dimensione 3.

5) Determinare il generico endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi = V$.

6) Verificare che $\varphi^2 = 0$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le rette $r = AR_\infty$ ed $s = BS_\infty$, dove

$$A(0,1,1), \;\; B(1,0,-1), \;\; R_\infty(1,1,0,0), \;\; S_\infty(0,1,1,0).$$

2) Dopo aver verificato che r ed s sono complanari, determinare il piano π, che le contiene.

3) Posto $P = r \cap s$, si determini la retta t per P ortogonale a s.

4) Determinare e studiare il luogo delle rette passanti per P, che formano con t un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

5) Sul piano $z = 0$ studiare il fascio di coniche di equazione $hx^2 - 2xy + hy^2 - hx - hy + 2 = 0$, determinando, in particolare, le coniche spezzate ed i punti base.

6) Trovare i vertici, i fuochi e gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica (G-S)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 4 Settembre 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid XA \text{ è diagonale} \right\} \text{ e } W = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{3,3} \mid AY \text{ è diagonale} \right\}.$$

1) Dopo aver verificato che V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^{3,3}$, determinarne le dimensioni ed una loro base.

2) Calcolare $V \cap W$ e $V + W$.

3) Determinare il generico endomorfismo $f : V \to V$ tale che $V \cap W$ sia contenuto nell'autospazio associato all'autovalore 3, e la matrice $B \in \operatorname{Ker} f$.

4) Studiare la semplicità del generico f e calcolare una base di autovettori di V nel caso in cui f sia semplice con l'autovalore 3 di molteplicità 2.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare i fuochi e le direttrici della conica γ di equazioni

$$z = 0,\ 3x^2 + 4xy + 6y^2 - 8x - 10y + 3 = 0.$$

2) Detto r l'asse focale di γ, determinare la retta r' simmetrica ad r rispetto al punto $P(1, 2, 2)$.

3) Sia p il piano contenente r ed r'. Determinare le circonferenze tangenti ad r in $F(2, 0, 0)$, di raggio 1, giacenti su p.

4) Sia Q_1 il piano p contato due volte e $Q_2 : yz = 0$. Studiare il fascio di quadriche generato da Q_1 e Q_2.

Università degli Studi di Catania
CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 23 Settembre 2008

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$e_1 = (1,0,0), v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,1,0),$$

ed il sottospazio $V = \mathscr{L}(v_1, v_2)$.

1) Determinare il valore reale di h per cui le seguenti assegnazioni:
$$g(v_1) = (1-h,3,2),\ g(v_2) = (2-h,3,1),$$
definiscano un endomorfismo su V.

2) Per il valore di h determinato nel punto precedente, sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f_{|V} = g$ ed $f(e_1) = v_2$; determinare la matrice M associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3) Nel caso che M sia diagonalizzabile, determinare una matrice P che la diagonalizzi.

II

1) Determinare il generico endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che
   a) $(1,1,0)$ sia autovettore associato all'autovalore 1;
   b) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=y-z=0\}$;
   c) $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$.

2) Verificare quali degli endomorfismi f sono semplici.

III

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare e studiare il fascio Φ di coniche passanti per $A(0,2,0)$, $B(0,4,0)$ e tangenti alla retta r di equazioni $x-y=z=0$ nel suo punto improprio.

2) Trovare il centro, gli asintoti e gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera del fascio.

3) Determinare l'equazione della sfera S tangente al piano α di equazione $x-2y+2z-10=0$ nel punto $P(2,0,4)$ e passante per l'origine.

4) Determinare raggio e centro della circonferenza che si ottiene intersecando S con il piano di equazione $x-2y-2z+1=0$.