CdL in Ingegneria Informatica (A-F), (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 31 Gennaio 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (2,1,2,0),\ v_2 = (2,-2,0,0),\ v_3 = (0,2,2,0).$$

1) Determinare il valore del parametro reale h per cui l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$, definita dalle relazioni
$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1,2,4,h^2-1) \\ f(v_2) &= (-8,-4,0,h^2-3h+2) \\ f(v_3) &= (6,4,4,h^2-h) \end{aligned}$$
induce un endomorfismo φ su V.

2) Determinare $\varphi^{-1}(\{(2,9,8,0)\})$.

3) Verificare che φ è semplice e determinare una base di autovettori di V.

4) Per il valore di h determinato al punto 1, determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, al generico endomorfismo g di $\mathbb{R}^4$ tale che la restrizione di g a V è uguale a f e $\dim \operatorname{Ker} g = 1$

5) Studiare la semplicità di g.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Determinare l'equazione del piano π passante per O e perpendicolare ai piani
$$\alpha :\ x+y-z=0 \quad \text{e} \quad \beta : z=0.$$

2) Determinare l'equazione della retta r passante per $P(2,-3,1)$, ortogonale alla retta $s :\ x = y = z$ e parallela al piano α.

3) Determinare e studiare la quadrica Q luogo delle rette dello spazio passanti per il punto $(1,-1,1)$, che formano con r una angolo di ampiezza $\pi/6$.

4) Studiare le sezioni di Q con i piani del fascio generato da π e α.

CdL in Ingegneria Informatica (A-F), (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 23 Febbraio 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i vettori

$$v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (1, -1, 1)$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ così definita:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h-3, 3-h, 0, 0) \\ f(v_2) &= (h, h-2, 2, h+4) \\ f(v_3) &= (h+3, 1, 5, h+1). \end{aligned}$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2) Determinare, al variare di h, la controimmagine del vettore $(0, 0, 0, 1)$.

3) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo ottenuto dalla composizione di f con la proiezione $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definita dalla legge $p(x, y, z, t) = (x, y, z)$; determinare h in modo tale che g ammetta l'autovalore -1, con molteplicità geometrica pari a 2.

4) Per il valore di h determinato al punto precedente, diagonalizzare la matrice associata a g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare le equazioni della retta u simmetrica alla retta r di equazioni $z - 1 = y - 2x = 0$, rispetto al piano $z = 0$.

2) Determinare le equazioni della retta s perpendicolare ed incidente r e la retta di equazioni $z = 3x - 2y + 1 = 0$.

3) Determinare e studiare il fascio Φ di coniche del piano $z = 0$, tangenti in $A(1, 1, 0)$ alla retta $z = x + y - 2 = 0$ ed alla retta $y = 0$ nell'origine.

4) Detta γ l'iperbole equilatera di Φ determinare e studiare le quadriche contenenti γ, l'asse $\vec{z}$ ed il punto $B(2, 0, 2, 0)$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
Corsi di Laurea in **Ingegneria Civile** e **Ingegneria Informatica** (G-Q)
Prova scritta di **Geometria** assegnata il **14/04/07**

1) Durata della prova: tre ore. È vietato uscire prima di aver consegnato il compito.
2) Usare solo carta fornita dal Dipartimento riconsegnandola tutta. COMPITO A

Ia

È dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le assegnazioni

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (h, h-1, h-1) \\ f(1,0,1) = (2h-1, 2h-2, 2h-1) \qquad \text{con } h \text{ parametro reale} \\ f(1,1,1) = (h,h,h) \end{cases}$$

1) Studiare f al variare di h, determinando in ciascun caso $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2) Dato il sottospazio $V = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ calcolare, al variare di h, la sua controimmagine

$$f^{-1}(V) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) \in V\}$$

3) Verificare che f è semplice per ogni valore di h e determinare una base di autovettori indipendente dal parametro.

Ib

Studiare, al variare del parametro reale k, l'endomorfismo $g : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ dato da

$$g(a + bx + cx^2) = a + b + ck + (a-c)x + (b+c)x^2$$

determinando, in ciascun caso, $\operatorname{Im} g$ e $\operatorname{Ker} g$. Trovare, al variare di k, la controimmagine

$$g^{-1}(2 + x + x^2) = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 \mid g(p) = 2 + x + x^2\}$$

II

È assegnato nello spazio un sist. di rif. cart. ort. $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u$.

1) Sia π il piano passante per i punti $A \equiv (1,2,1)$, $P_\infty \equiv (1,1,0,0)$, $Q_\infty \equiv (0,1,1,0)$. Determinare la generica retta **t** che passa per O e forma con π un angolo di $\frac{\pi}{6}$. Trovare la quadrica C luogo delle rette **t** e verificare che C è un cono. Studiare le coniche sezione di C coi piani coordinati.

2) Nel piano coordinato $z = 0$ determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per $(1,0)$ con tangente l'asse $\vec{x}$ e per $(0,2)$ con tangente l'asse $\vec{y}$. Studiare la parabola **p** di Φ determinandone un'equazione canonica, asse e vertice.

3) Determinare i cilindri che hanno per direttrice la parabola $\mathbf{p} \in \Phi$ e vertice sulla retta impropria $t = x - z = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 19 Giugno 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sono assegnate le matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & h \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale, e sia

$$V_h = \{X \in \mathbb{R}^{2,3} \mid LXM = 0\}.$$

1) Determinare una base di V_h nel caso in cui $\dim_{\mathbb{R}} V_h > 2$.

2) Nel caso $h = 6$, studiare la semplicità dell'endomorfismo $f : V_6 \to V_6$, definito dalla legge $f(X) = LX$.

3) Dire se la somma $V_5 + V_6$ è diretta.

4) Risolvere l'equazione $XM\,{}^tM = (2+k \;\; 4 \;\; 1)$, $X \in \mathbb{R}^{1,3}$, al variare del parametro reale k.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Scrivere l'equazione del cono Q di vertice $V(2,0,1)$ e contenente la conica di equazioni

$$z = x^2 - y^2 - 4 = 0.$$

2) Studiare le sezioni γ di Q con i piani passanti per la retta $r : \; x + y = 2y + z = 0$.

3) Nel caso in cui γ è spezzata determinare le sue componenti.

4) Detto p il piano per r che interseca Q in una conica spezzata, determinare le sfere di raggio $\sqrt{56}$ tangenti a p in V.

CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 10 Luglio 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid 3x + y + z - t = 0 \right\}$$

e

$$T = \left\{ \text{le matrici in } \mathbb{R}^{2,2} \text{ a traccia nulla} \right\}.$$

1) Determinare la dimensione ed una base di $W = V \cap T$.

2) Determinare la famiglia $\mathcal{E}$ di endomorfismi di V aventi W come autospazio associato all'autovalore 2.

3) Caratterizzare gli endomorfismi in $\mathcal{E}$ non diagonalizzabili.

4) Sia $f \in \mathcal{E}$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

e siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'immagine di A e la controimmagine di B tramite f.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare equazioni della retta r passante per il punto di coordinate $(1, 1, 2)$, incidente l'asse $\vec{z}$ e la retta di equazioni $x - 2 = y + z = 0$.

2) Determinare i punti A e B di r che distano $\sqrt{12}$ dall'origine O.

3) Determinare centro e raggio della circonferenza γ passante per O, A e B.

4) Calcolare l'equazione del cilindro di vertice nel punto improprio dell'asse $\vec{y}$ e contenente γ.

CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 6 Settembre 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

In $\mathbb{R}^5$ sono assegnati i vettori $v_1 = (1,0,0,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1,-1)$, $v_3 = (0,0,1,1,-1)$, $v_4 = (1,1,1,3,-1)$, $v_5 = (1,2,1,4,-2)$ e $v_6 = (3,1,0,4,2)$. Sia $V = \mathscr{L}(v_1,v_2,v_3)$ e $g : V \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita dalle seguenti assegnazioni

$$\begin{aligned} g(v_1) &= v_1 + v_4 \\ g(v_2) &= hv_3 + v_6 \\ g(v_3) &= v_2 + v_5 \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1) Provare che g induce un endomorfismo f su V.

2) Determinare il valore di h per cui f non è iniettiva ed il valore di h per cui f ammette l'autovalore 2.

3) Per $h = -13$ studiare la semplicità di f.

4) Per $h = -13$ determinare gli autospazi dell'endomorfismo $f^2 = f \circ f$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.
Se γ è una conica irriducibile, nel piano di equazione $z = 0$, con matrice associata B, si denoti con γ^* la conica, nel piano $z = 0$, con matrice associata B^{-1}.
Sia $\Gamma = \{$circonferenze del piano $z = 0$ con centro in $(-1,-1,0)\}$ e $\Gamma^* = \{\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma\}$.

1) Studiare la famiglia di coniche Γ^*.

2) Detta p la parabola in Γ^*, determinare fuoco e direttrice di p.

3) Determinare le coniche spezzate del fascio generato da p e p^*.

4) Determinare le equazioni delle sfere contenenti p^* di raggio $\sqrt{6}$.

CdL in Ingegneria Informatica
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 18 Settembre 2007

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 3 & 4 \\ 1 & 2 & h & 4 \\ 1 & 2 & 3 & h \\ 1 & h & h & 8-h \end{pmatrix},$$

dove h è un parametro reale.

1) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di h. Osservare che $\operatorname{Im} f$ non dipende dal parametro h.

2) Per $h = 0$ determinare la controimmagine del sottospazio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = z - t = 0\}.$$

3) Sia $V = \operatorname{Im} f$. Provare che la relazione

$$g(a, b + c, a + c, b) = (3a + kb, -3b - 3c, 3a + kb - 3c, -3b)$$

definisce un isomorfismo $g : V \to V$, al variare del parametro reale k.

4) Studiare la semplicità di g al variare di k.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Calcolare l'equazione dell'ellisse γ, avente fuochi in $O(0, 0, 0)$ e $A(1, 0, 0)$, giacente sul piano $z = 0$ e passante per $B(2, 0, 0)$.

2) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(0, 2, 1)$, contenente $\gamma : 8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = z = 0$.

3) Calcolare l'equazione dell'ellisse γ', simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $z = x - 2y = 0$.

4) Scrivere l'equazione del piano passante per i fuochi di γ' e per il punto $C(1, 1, 1)$.