CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 1 Febbraio 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f(x,y,z,t) = \big(2x+(h+3)y+(1-h)z+t, 2x+5y+(h+5)z+2t, x+2y+3z+t, (h-6)x+(h-13)y+(h-13)z+(h-5)t\big).$$

dove h è un parametro reale e sia

$$W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+2z+t=0\big\}.$$

1) Studiare la restrizione g di f al sottospazio W.
2) Provare che g induce un endomorfismo g' su W e studiare g'.
3) Studiare la semplicità di g'.
4) Studiare la semplicità di f.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Provare che la conica di equazione $z = x^2+6xy+y^2-2x-\dfrac{1}{8} = 0$ è spezzata e determinare le sue rette componenti r ed s.
2) Determinare il fascio Φ delle coniche aventi per asintoti le rette r ed s.
3) Calcolare l'eccentricità della generica iperbole in Φ.
4) Determinare il centro e gli assi di simmetria dell'iperbole γ in Φ passante per l'origine.
5) Calcolare la proiezione di γ sul piano $x-z=0$ dal punto $P(1,1,2)$.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 21 Febbraio 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $S = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ e V l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale generato da S.

1) Calcolare la dimensione di V.

2) Studiare l'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle relazioni

$$\begin{array}{l} f(A^{-1}) = (h+3)A^{-1} \\ f(I) = A^{-1} + I + hA \\ f(A) = A^{-1} + (1-h)I + hA^3 \end{array}.$$

3) Studiare la semplicità di f.

4) Sia $T = \{A^{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Provare che $V = \mathscr{L}(T)$.

II

1) Studiare, al variare del parametro reale h, la quadrica Q_h di equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ z & t & x & y \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Nel caso in cui Q_h è riducibile determinare l'ampiezza dell'angolo individuato dalle sue componenti.

3) Determinare l'equazione del piano tangente a Q_h nel punto $P(0, 0, h)$.

4) Studiare la sezione di Q_{-1} con i piani contenenti la retta di equazioni $x - y = x + z + 1 = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 20 Aprile 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + x + hx^3 \\ f(x) &= 2x + x^2 + x^3 \\ f(x^2) &= 1 + 3x + (3h+4)x^2 + 2(h+1)x^3 \\ f(x^3) &= 1 - x - x^2 + (h-1)x^3 \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1) Studiare f al variare di h, determinando $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Studiare la semplicità di f nel caso in cui 2 è autovalore.

3) Sia $W = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$. Calcolare $W \cap \operatorname{Im} f$ al variare di h.

4) Nel caso $h = 0$ determinare $f^{-1}(\{1+x\})$ e $f^{-1}(\mathscr{L}(1+x))$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare l'ampiezza dell'angolo acuto individuato dalle rette

$$r_1 \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - 5z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - y - z + 3 = 0 \end{cases} .$$

2) Determinare equazioni della retta r passante per l'origine e perpendicolare alle rette r_1 ed r_2.

3) Determinare la famiglia delle quadriche aventi il vertice appartenente a r e contenenti la conica γ di equazioni

$$\gamma \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} .$$

4) Studiare la proiezione di γ sul piano di equazione $x - 2z + 17 = 0$ da un punto $P \in r$, al variare di P.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 20 Giugno 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Siano $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gli endomorfismi le cui matrici associate rispetto alle basi canoniche sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 2h+1 & 0 & h+1 & h+3 \\ 3 & h-1 & 2 & 4 \\ 1 & -h-1 & 0 & -2 \\ 0 & 2h+1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

1) Studiare f al variare di h, determinando le equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

2) Determinare h in modo tale che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

3) Calcolare, al variare di h, una base dello spazio $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$, precisando se tale somma è diretta.

4) Studiare la semplicità di f nei casi in cui vi siano autovalori con molteplicità superiore a 2.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la retta s passante per $F(0, 1, -1)$ e complanare alle rette

$$r_1 \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r_2 \begin{cases} y - 2z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

2) Scrivere equazioni dell'ellisse γ avente fuoco in F, direttrice relativa a F la retta r_1 ed eccentricità $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

3) Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(0, 0, 1)$, contenente γ.

4) Studiare la conica proiezione di γ sul piano di equazione $x - kz = 0$, dal punto V, al variare del parametro reale k.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 11 Luglio 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i sottospazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z\}$ e $W = \mathscr{L}\big((-1, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 1)\big)$.

1) Determinare $V \cap W$ e $V + W$.
2) Studiare al variare del parametro reale h l'applicazione lineare $f : V \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice
$$\mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1-h & 4 & h+2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-h & 4 & h+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
dove
$$\mathscr{B} = \big((0, 0, 0, 1), (2, 2, 2, 0), (2, 1, 2, 0)\big)$$
ed $\mathscr{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
3) Provare che f induce un endomorfismo f' su V per ogni valore di h e studiare la semplicità di f' al variare di h.
4) Provare che $V \cap W$ è autospazio di f' per ogni h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la distanza d del punto $A = (0, 0, 1)$ dalla retta $r : \; z = 2x + y - 1 = 0$.
2) Trovare l'equazione del piano π passante per A, parallelo a r ed avente distanza da r uguale a d.
3) Determinare l'equazione della quadrica Q luogo delle rette passanti per $B(0, 1, 0)$ e che formano con r un angolo di $\pi/4$.
4) Classificare la conica sezione di Q con il piano π.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 5 Settembre 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori

$$v_1 = (1,1,0,0,0),\ v_2 = (1,0,1,0,0),\ v_3 = (1,0,0,1,0),\ v_4 = (-2,0,0,0,1)$$

e sia

$$W = \{av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 \mid a+b+c+d = 0\}.$$

1) Dire per quali valori del parametro reale k il vettore $(1-2k, 1, -2, k^2+1, -1)$ appartiene a W.

2) Studiare, al variare del parametro reale h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to V$ definita dalla legge
$$f(x,y,z) = (x-y)v_1 + (y-z)v_2 + h(z-x)v_3.$$

3) Determinare $\operatorname{Im} f \cap W$ al variare di h.

4) Studiare, al variare del parametro reale m, la semplicità dell'endomorfismo $g : W \to W$, definito dalle relazioni $g(v_1 - v_2) = v_2 - v_3$, $g(v_2 - v_3) = m(v_1 - v_2)$, $g(v_3 - v_4) = v_1 - v_2 + 2v_3 - 2v_4$.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Classificare la quadrica S di equazione $(x-y)^2 + (y+z)^2 - 2(x-1)^2 = 0$, determinando gli eventuali vertici.

2) Determinare i piani, contenenti l'asse $\vec{y}$, che secano S in parabole.

3) Determinare l'equazione del cilindro avente generatrici perpendicolari al piano di equazione $y + 2z + 37 = 0$, contenente la sezione di S col piano $x - z = 0$.

4) Studiare, al variare del parametro reale h, la quadrica Q di equazione

$$(x-y)^2 + (y+z)^2 - h(x-1)^2 + 2(h-2)z = 0.$$

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 25 Settembre 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (0,0,0,1),\ v_2 = (1,0,-1,0),\ v_3 = (0,1,-1,1).$$

1) Provare che le seguenti relazioni

$$\begin{array}{l} f(v_1) = (0,h,-h,h+1) \\ f(v_2) = (-1,0,1,0) \\ f(v_3) = (0,1,-1,4h+1) \end{array}$$

definiscono un endomorfismo f di V per ogni valore del parametro reale h.

2) Studiare f al variare di h.

3) Determinare il valore di h per cui $f(2,-1,-1,0) = (-2,0,2,-3)$.

4) Determinare il valore di h per cui $f^{-1}\big(\{(-1,1,0,1)\}\big) = \{(1,1,-2,1)\}$.

5) Verificare che f è semplice per ogni h.

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z},u$.

1) Studiare il fascio Φ di coniche di equazioni

$$\Phi \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + hxy + y^2 - hx - 1 = 0 \end{array} \right.$$

determinando, in particolare, le coniche spezzate ed i punti base.

2) Determinare una equazione canonica della conica γ del fascio Φ passante per $(1,1,0,0)$.

3) Determinare le coordinate del vertice e del fuoco di γ e le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice nel sistema di riferimento originario.

4) Determinare e studiare la quadrica Q contenente γ e le rette

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. .$$

CdL in Ingegneria Informatica (G-Q)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** del giorno 18 Dicembre 2006

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Per ogni $h \in \mathbb{R}$ siano
$$V_h = \{f \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(h) = 0\}$$
e $W = \mathscr{L}(1-x, x^2-x^3)$.

5) Determinare una base e la dimensione di $V_h \cap W$, al variare di h.

6) Studiare l'endomorfismo $\varphi_h : V_h \to V_h$ definito dalla legge
$$\varphi_h(a+bx+cx^2+dx^3) = (h-x)(b+2cx+(c-d)x^2).$$

7) Studiare la semplicità di φ_h, al variare di h.

8) Determinare $\varphi_2^{-1}(U)$ dove $U = \mathscr{L}\big(x-2, (x-2)^3\big)$.

II

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la conica γ di equazioni
$$\gamma \begin{cases} x^2+6kxy-4y^2-x-4y=0 \\ z=0 \end{cases} .$$

2) Quando γ è riducibile, dette r ed s le sue componenti, determinare, sul piano $z=0$, le bisettrici degli angoli individuati da r ed s.

3) Determinare le rette del piano $z=0$, passanti per il punto $Q(2,0,0)$, che formano con r ed s un triangolo isoscele, con angolo al vertice in $r \cap s$.

4) Nel caso $k=0$ determinare la proiezione di γ sul piano di equazione $x+z=0$, dal punto $P(1,1,1)$.