CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare** assegnata il 22 Novembre 2004 - **A**

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 1 \\ h-1 & 2 & h & 3 \\ 1 & h+2 & 1 & 4h \\ h-2 & 4-h & h+1 & 4h+1 \end{pmatrix},$$

dove h è un parametro reale.

1) Studiare f, determinando, al variare di h, $\operatorname{Ker} f$ ed $\operatorname{Im} f$.

2) Nel caso $h = 1$ studiare la semplicità di f.

3) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla trasposta della matrice A. Nei casi $h = 0$ e $h = 1$ determinare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.

II

Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z + 2t = 0\}$.

1) Verificare che la relazione

$$g(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(5y + z + 2t, -2x + 3y + z + 2t, -22x + 19y + 13z + 2t, -10x + 5y + 5z + 2t),$$

induce un endomorfismo $f : V \to V$.

2) Studiare la semplicità di f.

3) Determinare gli autospazi di f.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare** assegnata il 22 Novembre 2004 - **B**

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s-2 & 0 & 1 \\ s-3 & 2 & s-2 & 3 \\ 1 & s & 1 & 4s-8 \\ s-4 & 6-s & s-1 & 4s-7 \end{pmatrix},$$

dove s è un parametro reale.

1) Studiare f, determinando, al variare di s, $\operatorname{Ker} f$ ed $\operatorname{Im} f$.

2) Nel caso $s = 3$ studiare la semplicità di f.

3) Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla trasposta della matrice A. Nei casi $s = 2$ e $s = 3$ determinare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.

II

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

1) Diagonalizzare A.

2) Determinare l'insieme $S = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid X^2 = A^2\}$.

3) Calcolare la dimensione di $\mathscr{L}(S)$.

4) Provare che $\mathscr{B} = (A^2, A^3)$ è una base di $\mathscr{L}(S)$.

5) Sia $g : \mathscr{L}(S) \to \mathscr{L}(S)$, l'applicazione lineare definita da

$$g(I) = A, \ \ g(A) = I - 2A^{-1},$$

dove I è la matrice identica di $\mathbb{R}^{2,2}$; determinare $\mathfrak{M}^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g)$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata l'11 Dicembre 2004

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1) Determinare il generico endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \mid x - y = t - u = 0\} \ e \ \operatorname{Im} f = \mathscr{L}\big((0, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0)\big).$$

2) Studiare la semplicità di f.

3) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

4) Studiare $f \circ f$.

5) Determinare f in modo tale che $f \circ f = 0$.

II

1) Determinare equazioni della retta s giacente sul piano $x + y + z = 0$, passante per $P(1, -1, 0)$ e perpendicolare alla retta r di equazioni $2x - y - 3 = x - z + 1 = 0$.

2) Determinare la distanza fra la retta r e la retta s.

3) Determinare i punti di s aventi distanza $\sqrt{2}$ da P.

III

1) Determinare la conica γ passante per i punti $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 1)$, $C(0, -5)$ e $D(-6, 1)$.

2) Classificare γ e calcolare il suo centro di simmetria.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 21 Gennaio 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnata l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1-h^2 & h^3-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & h^2-1 & 2-h^2 \end{pmatrix}.$$

1) Studiare, al variare del parametro reale h, l'applicazione lineare f_h, determinando $\operatorname{Im} f_h$, $\operatorname{Ker} f_h$ e le loro equazioni cartesiane.
2) Determinare, al variare di h, $f_h^{-1}(0, 2, \sqrt{2})$.
3) Determinare $\bigcap_{h \in \mathbb{R}} \operatorname{Im} f_h$.
4) Discutere la semplicità di f_h al variare di h e trovare gli autospazi nel caso in cui ve ne sia uno di dimensione 2.
5) Posto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$, trovare il valore di h per cui la restrizione di f_h a V induce un endomorfismo g su V e fissata una base di V determinare la matrice associata a g rispetto a tale base.

II

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, u$.

1) Determinare:
   a) la retta r passante per i punti $A(2, 0)$ e $B(2, -3, 0)$;
   b) l'asse del segmento di estremi i punti $C(4, 3)$ e $D(8, 1)$;
   c) il centro del cerchio tangente alla retta $y = 2x$ nel punto $E(2, 4)$ e passante per $A(2, 0)$.
2) Studiare le coniche del fascio di equazione:
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-1)^2 = 0,$$
determinando le equazioni degli eventuali cerchi, parabole ed iperboli equilatere. Determinare gli asintoti, gli assi ed una equazione ridotta della conica del fascio passante per il punto $B(1, 1)$.

III

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.
Determinare e studiare la quadrica contenente la conica $xy + y - 2 = z = 0$, i punti $A(0, 0, 1, 0)$, $B(2, 2, 1)$ e la retta $x - 1 = z - 1 = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 21 Gennaio 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, u$.

1) Determinare la retta r passante per i punti $A(2,0)$ e $B(2,-3,0)$.

2) Calcolare l'asse del segmento di estremi i punti $C(4,3)$ e $D(8,1)$.

3) Determinare l'equazione della circonferenza tangente alla retta $y = 2x$ nel punto $E(2,4)$ e passante per $A(2,0)$.

4) Studiare le coniche del fascio di equazione

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-1)^2 = 0$$

determinando le equazioni delle eventuali circonferenze, parabole ed iperboli equilatere.

5) Determinare gli asintoti, gli assi ed una equazione ridotta della conica del fascio passante per il punto $B(1,1)$.

II

1) Classificare la quadrica Q di equazione $(x-2y)(y-5z) - 1 = 0$.

2) Classificare la conica γ, sezione di Q con il piano π di equazione $x + y - z = 0$.

3) È γ una iperbole equilatera?

4) Determinare l'equazione della generica sfera tangente a π nell'origine del sistema di riferimento.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 2 Marzo 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(e_1) = &\ e_4 \\ f(e_2) = &\ he_2 + (h-2)e_3 \\ f(e_3) = &\ he_3 \\ f(e_4) = &\ e_3 + (1-h)e_4 \end{aligned}$$

dove h è un parametro reale ed $(e1, e2, e3, e4)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

1) Studiare la semplicità di f al variare di h e determinare i suoi autospazi.

2) Studiare, al variare di h, l'applicazione lineare $g = f \circ f$.

3) Determinare, al variare di h, la controimmagine tramite g del vettore $(0, 1, 1, 1)$.

II

Nel piano sono assegnati i punti $F(0, 1)$, $A(2, 0)$ ed una generica retta r passante per l'origine.

1) Determinare e studiare la famiglia $\mathcal{F}$ di coniche aventi per fuoco F, direttrice relativa a F la retta r ed eccentricità $\frac{1}{d}$ dove d è la distanza di A da r.

2) Determinare il centro della generica conica di $\mathcal{F}$.

3) Determinare il polo della retta di equazione $2x + 2y - 1 = 0$ rispetto alla generica conica di $\mathcal{F}$.

III

Sia Q_k la quadrica di equazione $(x - z)^2 + k(x^2 - y^2 - 4z) = 0$, k parametro reale.

1) Studiare Q_k al variare di k.

2) Determinare gli eventuali vertici della quadrica Q_k.

3) Studiare la sezione di Q_k con il piano di equazione $x + y - z = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 24 Giugno 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $\varphi : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ l'applicazione

$$\varphi(p(x)) = D\big((hx+1)p(x+1)\big),$$

dove h è un parametro reale e D è l'operatore di derivazione.

1) Provare che l'applicazione φ è lineare.
2) Studiare φ al variare di h.
3) Studiare la semplicità di φ al variare di h.
4) Nel caso $h = 2$ determinare una base di autovettori.

II

Nel piano sono assegnati i punti $O(0,0)$, $A(4,0)$ e $B(1,3)$.

1) Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{OBA}$.
2) Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo OAB.
3) Scrivere l'equazione della parabola avente per vertice O, per asse la retta OB e passante per A.

III

Nello spazio è assegnata la conica

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 2yz + 2x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} .$$

1) Classificare γ.
2) Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici parallele alla retta $x = 2y = z$, contenente γ.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 12 Luglio 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici 2×2 é assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ cosí definito

$$f(A) = A + h\,{}^{t}\!A$$

per ogni $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

1) Studiare, al variare del parametro reale h, l'endomorfismo f, determinando $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$.

2) Discutere la semplicitá di f al variare di h e nel caso $h = 1$ determinare una base di autovettori.

3) Determinare al variare di h

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare la retta s parallela alla retta r di equazioni $3x - 2y + z = x - 2z = 0$ ed incidente le rette sghembe $x = y = z + 2$ e $2x + z = y + z + 1 = 0$.

2) Determinare e studiare il fascio Φ delle coniche che passano per i punti$A \equiv (-1, 0, 0)$,$B \equiv (1, 0, 0)$ e $C \equiv (0, 1, 0)$ e sono tangenti alla retta $z = y - 1 = 0$.

3) Determinare e studiare le quadriche che contengono la circonferenza di Φ e la circonferenza di equazioni $y = x^2 + z^2 - 1 = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 5 Settembre 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e si consideri l'insieme

$$U = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^{3,3}\}.$$

1) Dopo aver verificato che U é un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale, calcolare la sua dimensione ed una sua base.

2) Determinare $V = U \cap W$ dove W é lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine tre triangolari superiori ad elementi reali.

3) Studiare l'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalla legge $f(X) = XB$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix},$$

al variare di h, parametro reale.

4) Studiare la semplicitá di f al variare di h.

II

Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, u$.

1) Scrivere l'equazione dell'iperbole γ avente per asintoti l'asse $\vec{x}$ e la retta di equazione $2x - y = 0$, e passante per $A(1,1)$.

2) Determinare l'eccentricità di γ.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza δ tangente a γ in A e avente centro sulla retta di equazione $x + y - 3 = 0$.

4) Sia Φ il fascio di coniche generato da γ e δ. Determinare i punti base e la conica spezzata di Φ.

5) Classificare le coniche irriducibili in Φ.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Fa), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Algebra Lineare e Geometria** assegnata il 28 Settembre 2005

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Nell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ sono assegnati i vettori

$$v_1 = (1,1,1,1,0),\ v_2 = (0,0,-1,2,1),\ v_3 = (1,1,h,-1,-1),\ v_4 = (2,2,h,2,k),$$

con h e k parametri reali e sia $V = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

1) Determinare la dimensione ed una base di V al variare di h e k.

2) Nel caso $h = 0$ e $k = 0$ determinare equazioni cartesiane di V.

3) Nel caso $h = 0$ e $k = 0$ studiare la semplicità dell'endomorfismo $f : V \to V$ definito dalle relazioni
$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 + v_4 \\ f(v_2) &= v_1 - v_4 \\ f(v_3) &= sv_1 + v_4 \end{aligned}$$
al variare di s, parametro reale.

4) Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base (v_2, v_3, v_4).

II

Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Determinare il valore di h per cui le rette di equazioni
$$\begin{cases} x + hy + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$$
sono complanari e determinare l'equazione del piano p che le contiene.

2) Determinare le equazioni delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ tangenti a p in $P(0, -3, 0)$, di raggio $\sqrt{22}$.

3) Studiare il fascio Φ di quadriche generato da $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$. Determinare il vertice del cono di Φ.

4) Determinare il luogo dei centri ed il generico raggio delle sfere in Φ.

5) Determinare il centro ed il raggio della circonferenza ottenuta dalla sezione di $\mathcal{S}_1$ col piano di equazione $x - y = 0$.