CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 13 Dicembre 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1-h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Si consideri l'equazione $AX = {}^tA$.

1) Determinare i valori di h per cui tale equazione ammette soluzioni.

2) Calcolare la soluzione nel caso $h = 4$.

II

1) Studiare, al variare del parametro reale k, l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & k-5 \\ 2 & 3-k & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Nel caso $k = 4$ calcolare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

3) Nel caso $k = 4$ dire se f è semplice.

III

1) Determinare i fuochi e l'eccentricità dell'ellisse di equazione $15x^2 + 15y^2 = (x + 2y - 4)^2$.

2) Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuoco in $O(0,0)$, relativa direttrice $x + 3y - 5 = 0$ ed eccentricità $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Calcolare l'area del triangolo individuato dai fuochi delle due ellissi.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 10 Febbraio 2004

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Siano

$$\mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathbb{R}^{3,3} \mid M = {}^tM \right\} \text{ e } \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathbb{R}^{3,3} \mid M = -{}^tM \right\},$$

e sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Sia $f : \mathrm{Sym}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Asym}_3(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita dalla legge

$$f(X) = AX - XA.$$

1) Studiare f, determinando, in particolare, una base per il nucleo.
2) Dire se $\mathrm{Ker}\, f$ coincide con $\mathscr{L}(I, A, A_{\mathrm{agg}})$.
3) Studiare la diagonalizzabilità di A_{agg}.

II

1) Studiare la semplicità dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

   $$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ (x, y, z, t) \mid x - y - 3t = x - z - t = 0 \right\},$$

   $v_3 = (0, 1, -1, 0)$ è autovettore associato all'autovalore 7 ed inoltre

   $$f(1, -1, 0, 1) = (8, h - 6, 1 - h, 7),$$

   con h parametro reale.
2) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

III

Nello spazio sono assegnate le rette $r : 3x + y - 4z = 2x + y + z = 0$ ed $s : 2x - 6z - 1 = x - z - 1 = 0$.

1) Dopo aver verificato che r ed s sono complanari, determinare il piano π che le contiene.
2) Determinare il cono di vertice $V(1, 1, 0)$, contenente la circonferenza di π di centro l'origine e raggio 1.

CdL in Ingegneria Informatica (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 4 Marzo 2004

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k^2 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f al variare del parametro reale k.
2) Determinare i valori di k per cui f ammette l'autovalore -1.
3) Per i valori di k di cui sopra dire se f è semplice.

II

1) Nel piano, studiare il fascio generato dalle coniche di equazione $6x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$ e $x^2 - 1 = 0$.
2) Sia γ la conica del fascio contenente la retta di equazione $x + y = 0$. Determinare l'ampiezza degli angoli individuati dalle due rette in cui si spezza γ.

III

Nello spazio sia Φ la famiglia di tutti i paraboloidi ellittici contenenti la circonferenza di equazioni $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

1) Determinare la generica equazione di una quadrica in Φ.
2) Sia $Q \in \Phi$ la quadrica di equazione $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz - 2z - 1 = 0$. Determinare il piano tangente a Q in $P(1, 0, 0, 1)$.
3) Determinare l'unico punto improprio reale di Q.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Geometria** assegnata l' 1 Aprile 2004

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & 5e_1 + (h-6)e_2 + (h-10)e_3 \\ f(e_2) & = & (3-h)e_2 + (h-2)e_4 \\ f(e_3) & = & (h^2-4)e_2 + e_3 + (4-h^2)e_4 \\ f(e_4) & = & (2-h)e_2 + (h-1)e_4 \end{array}$$

dove (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

1) Studiare la semplicità di f al variare del parametro reale h.

2) Determinare una base di ogni autospazio al variare di h.

3) Nel caso $h = 2$ determinare la matrice associata all'applicazione inversa f^{-1}, rispetto alle basi canoniche.

II

1) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (k-2)x + 2y + z + t = x + y - kz + 5t = kx + 7y + 7z - t = 0\},$$

al variare del parametro reale k.

2) Determinare gli eventuali valori di k per cui V contiene vettori non nulli, aventi la seconda componente nulla.

III

1) Nel piano determinare gli asintoti ed il centro di simmetria dell'iperbole γ di equazione $4x^2 + 4xy - 3y^2 - 20x - 2y + 37 = 0$.

2) Determinare i punti A e B di γ la cui tangente è parallela all'asse delle $\vec{x}$.

3) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine del sistema di riferimento, per A e per B.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 29 Giugno 2004

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

1) Determinare il valore di h affinché

$$\mathscr{A} = \big((1,1,h,0),(2,1,0,1),(3,0,1,1)\big)$$

e

$$\mathscr{B} = \big((9,2,3,3),(2h,0,2,0),(5,1,1,2)\big)$$

siano basi dello stesso sottospazio W di $\mathbb{R}^4$.

2) Per tale valore di h determinare le matrici di passaggio relative alle basi $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

3) Sia $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$. Calcolare $V \cap W$.

II

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4},$$

ed I la matrice identica di $\mathbb{R}^{4,4}$.

1) Calcolare il rango della matrice $B = k(A - 2I) + A$ al variare del parametro reale k.

2) Determinare, al variare di k, tutte le soluzioni del sistema lineare $BX = 0$, con $X \in \mathbb{R}^{4,1}$.

III

1) Studiare, al variare del parametro reale h, la quadrica Q di equazione

$$(x - z)(y + hz + 1) + h(x + y)^2 = 0.$$

2) Nel caso $h = 1$ studiare la sezione di Q con il piano $x - 2z = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 14 Luglio 2004

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 3h & 4h-1 & 1-4h \\ 4h-1 & 3h & 3-3h \\ 4h-1 & 4h-1 & 4-4h \end{pmatrix}.$$

1) Studiare f al variare del parametro reale h.

2) Dopo aver verificato che 3 è un autovalore, studiare la semplicità di f, al variare di h.

II

1) Studiare, al variare del parametro reale k, la conica di equazione

$$(3k+1)x^2 + 2xy + (3k+1)y^2 - (k+6)x - (7k+6)y + 9 = 0.$$

2) Nel caso in cui la suddetta conica è una parabola, determinarne asse di simmetria e vertice.

III

1) Nello spazio determinare equazioni della circonferenza γ tangente alla retta

$$z = x + y - 3 = 0$$

nel punto $P(1, 2, 0)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento.

2) Calcolare l'equazione del cilindro contenente γ ed avente generatrici parallele alla retta di equazioni $x + 2y + z + 99 = x + y + z + 101 = 0$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 7 Settembre 2004

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Discutere e risolvere al variare del parametro reale k il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + kz = 4k \\ 2ky - kz = 1 \end{cases} .$$

II

1) Studiare, al variare del parametro reale h, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni
$$f(2,1,0) = (h+1, 2h-1, 2)$$
$$f(2,0,0) = (2, 2h-2, 2)$$
$$f(2,1,-1) = (2, 2h-1, 1)$$

2) Determinare la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

3) Diagonalizzare A, se possibile, nei casi $h = 1$, $h = \frac{1}{2}$ e $h = 2$.

III

1) Determinare le equazioni delle rette passanti per $A(-2,0,0)$, ortogonali a $r :\ x - y = z = 0$, che formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse $\vec{z}$.

2) Classificare la conica γ di equazioni $2x^2 - y^2 + 3x + 1 = z = 0$ e determinarne una equazione canonica, gli assi di simmetria e i fuochi.

3) Determinare l'equazione del cono contenente γ ed avente vertice in $V(1,1,1)$.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale
CdL in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 28 Settembre 2004

Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare solo carta fornita dal Dipartimento di Matematica e Informatica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

dove h è un parametro reale.

1) Studiare f al variare di h determinando Ker f, Im f e le loro equazioni cartesiane.
2) Nel caso in cui f non è suriettiva, determinare gli autovalori, gli autospazi di f e studiare la diagonalizzazione di A.
3) Nel caso in cui f non è suriettiva, determinare la controimmagine dei vettori $(3, 4, -1, 0)$ e $(4, 4, 1, 1)$.

II

1) Determinare la retta p perpendicolare ed incidente le rette $r: \ z - 2 = x + y - 3z + 5 = 0$ ed $s: \ x - y + 2z + 2 = z = 0$ ed i punti $A = p \cap r$ e $B = p \cap s$.
2) Determinare l'equazione della sfera tangente in A ad r ed in B ad s.

III

1) Studiare il fascio di coniche

$$\lambda(x^2 - 4xy - y^2 + 2x) + \mu(x - y + 1) = 0.$$

2) Determinare gli asintoti della generica iperbole del fascio.