CLASSE
Ingegneria Informatica (G-La)

Prova scritta di **Algebra** assegnata il 9 Novembre 2002

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$f(e_1) = v_1,\ f(e_2) = v_2,\ f(e_3) = 3v_1 - v_2,\ f(e_4) = 2v_1 + v_2$$

dove (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,2,1)$.

1) Studiare la restrizione di f al sottospazio $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y + z + w = 0\}$.

2) Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui la restrizione di f al sottospazio $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - (h^2 - h + 2)y + (h^2 - h + 1)z - (h-1)w = 0\}$ induce un endomorfismo $g\colon V \to V$.

3) Calcolare una base di $g^{-1}\big(\mathscr{L}((1,2,3,1))\big)$.

II

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $V = \mathscr{L}(I, A, A^2) \subset \mathbb{R}^{3,3}$. Studiare la semplicità e determinare gli autospazi dell'endomorfismo $f\colon V \to V$ definito dalle relazioni

$$f(I) = A - I,\ f(A) = -A,\ f(A^2) = A^3.$$

III

Determinare il valore di h per cui le due matrici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 2h-1 & -2h & 2-2h \\ 0 & -1 & 0 \\ h-1 & 1-h & 2-h \end{pmatrix}$$

sono simili.

CLASSE
Ingegneria Informatica (G-La)

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 3 Dicembre 2002

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Nello spazio sono assegnate le rette di equazioni

$$r_1 \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases} \quad r_2 \begin{cases} x-y-2=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad r_3 \begin{cases} x+3z-4=0 \\ 2(k-1)x+3y+5-2k=0 \end{cases} .$$

dove k è un parametro reale.

1) Determinare il valore di k per cui le tre rette sono complanari.

2) Per tale valore di k calcolare l'equazione del piano che le contiene.

3) Determinare gli eventuali valori di k tali che r_2 ed r_3 formino un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

II

Nel piano è assegnata la conica γ di equazione $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 4y = 0$.

1) Classificare γ.

2) Determinare un cambiamento ortogonale del sistema di riferimento che trasformi l'equazione di γ in forma canonica e verificare il risultato ottenuto.

III

Sia Q la quadrica di equazione $(h+1)x^2 + (h+1)y^2 + z^2 + hxz + hyz - 2(h+1)z = 0$, con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Q al variare di h.

2) Determinare il valore di h per cui Q è una sfera S.

3) Determinare il centro ed il raggio di S.

Classe Ingegneria Informatica (G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 14 Dicembre 2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla legge

$$f(x,y,z,w) =$$
$$\big(x + ky - z + (k-1)w, (2k-1)y + (1-k)z + (k-2)w, 2(k-1)y + (2-k)z + (k-2)w, 2w\big).$$

1) Studiare la semplicità di f.
2) Nei casi in cui è semplice determinare una base di autovettori.
3) Nel caso $k = 1$, detta V la somma degli autospazi, calcolare l'equazione cartesiana di V.
4) Studiare la restrizione dell'endomorfismo $f - 1_{\mathbb{R}^4}$ a V.

II

Sia $V = \mathscr{L}(I, A, A^2) \subset \mathbb{R}^{3,3}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire per quale valore del parametro reale k le relazioni

$$f(I) = I - 2A,\ f(A) = 2I + A,\ f(A^2) = 4I + (k+1)A$$

definiscono un endomorfismo $f : V \to V$.

III

Nello spazio è assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

1) Calcolare le equazioni della retta r passante per i punti $A(1,1,0)$ e $B(0,2,-1)$.
2) Determinare il piano π contenente r ed il punto $C(1,1,1)$.
3) Calcolare equazioni della retta del piano π perpendicolare ad r e passante per A.
4) Calcolare equazioni della retta r', simmetrica di r rispetto al piano $x + y + 2z = 0$.
5) Calcolare l'ampiezza dell'angolo acuto individuato da r ed r'.
6) Scrivere l'equazione della sfera avente centro nel punto $D(1,-1,2)$ e tangente a r.

Classe Ingegneria Informatica (G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 9 Gennaio 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Siano $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gli endomorfismi definiti dalle leggi

$$f(x,y,z) = (x - y - 3z, -x + 2y + 5z, -y - 2z)$$

$$g(x,y,z) = (-y - z, x + 2y + z, -x - y).$$

1) Studiare la semplicità di $f \circ g$ e di $g \circ f$.

2) Se è possibile, diagonalizzarli.

3) Studiare l'endomorfismo $kf \circ g + g \circ f$, al variare del parametro reale k.

II

Sull'insieme $V = \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x]$ definiamo le seguenti operazioni:

$$(f_1, g_1) + (f_2, g_2) = (f_1 + f_2, g_1 + g_2); \;\; a(f,g) = (af, ag);$$

V risulta così un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Sia

$$W = \{(f,g) \in V \mid f(1) = g(2)\}.$$

1) Provare che W è un sottospazio di V.

2) Determinare una base e la dimensione di W.

III

1) Sul piano $z = 0$, scrivere l'equazione dell'ellisse γ avente direttrice $z = x - 2y = 0$, fuoco $F(2,0,0)$ ed eccentricità $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Determinare gli assi di simmetria di γ.

3) Determinare l'iperbole avente per asintoti gli assi di γ e passante per $A(0,5,0)$.

4) Determinare l'equazione del cono Q, di vertice $V(1,-1,-1)$, contenente γ.

5) Classificare la conica sezione di Q col piano $x + z = 0$.

Classe Ingegneria Informatica (G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 27 Marzo 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (7-2h, 2(2-h), h-1, 3-h) \\ f(e_2) &= (2(h-2), 2h-1, -h, h-2) \\ f(e_3) &= (0,0,1,0) \\ f(e_4) &= (0,0,0,1) \end{aligned}$$

dove h è un parametro reale ed (e_1, e_2, e_3, e_4) è la base canonica; sia inoltre

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2w = 0\}.$$

1) Verificare che, per ogni $h \in \mathbb{R}$, la restrizione di f a V induce un endomorfismo $g\colon V \to V$.
2) Studiare g.
3) Studiare la semplicità di g.
4) Nel caso $h = 0$ determinare equazioni cartesiane della somma degli autospazi.

II

Nel piano sono assegnati il punto $A(1,0)$ e la retta $r : 12x + 5y - 12 = 0$.

1) Studiare il fascio di coniche simmetriche rispetto all'origine e tangenti in A alla retta r.
2) Determinare gli asintoti dell'iperbole equilatera del fascio.

III

Nello spazio è assegnata la retta r di equazioni parametriche $x = 11u + 14$, $y = -16u - 14$, $z = -u$.

1) Determinare equazioni della circonferenza γ tangente ad r ed avente centro nell'origine.
2) Determinare le sfere contenenti γ aventi raggio pari a $\sqrt{122}$.

Classe Ingegneria Informatica (G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata l' 11 Aprile 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Siano
$$f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3,\qquad g:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}_2[x]$$
le applicazioni lineari così definite:
$$f(a,b,c,d,e)=(a-b,c-d,e-a),\quad g(a,b,c,d,e)=b-c+(d-e)x+(a-d)x^2.$$
Siano inoltre
$$U=\mathscr{L}\big((1,1,1),(-1,0,2)\big),\quad W=\mathscr{L}\big(1+x^2,x-1\big)$$
sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}_2[x]$ rispettivamente.

1) Determinare una base di $V=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(W)$.

2) Studiare la restrizione di g a V.

II

Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori
$$v_1=(1,1,1,1),v_2=(4,1,-1,0),v_3=(2,1,0,1).$$

1) Determinare l'equazione cartesiana di V.

2) Studiare, al variare di $h\in\mathbb{R}$, la semplicità dell'endomorfismo $f:V\to V$ definito dalle relazioni
$$\begin{aligned}f(v_1)&=(h,h,h,h)\\ f(v_2)&=(h+12,h,h-8,h-4)\\ f(v_3)&=(4h-12,h-2,4-h,2)\end{aligned}$$

3) Determinare per ogni $h\in\mathbb{R}$ gli autospazi di f.

III

Determinare vertici, assi di simmetria, fuochi, direttrici e tracciare il grafico della conica γ di equazioni
$$x^2+6xy+9y^2+x+13y-12=0,\ \ z=0.$$
Determinare sulla retta di equazioni $x=y=z$ i punti P tali che il triangolo avente come vertici P ed i punti di intersezione di γ con l'asse delle $\vec{x}$, abbia area 1.

Classe Ingegneria Informatica (A-B, G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 4 Luglio 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,1,0,2) \\ f(e_2) &= (2,-1,k-2,1) \\ f(e_3) &= (3,0,1,k) \end{aligned}$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1) Studiare f al variare del parametro reale k.

2) Nel caso $k = 3$ determinare un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$.

3) Nel caso $k = 0$ provare che l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Im} f$, indotta da f, è invertibile e determinare g^{-1}.

II

Dire se la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^{4,4}$ ed in $\mathbb{C}^{4,4}$; quando è diagonalizzabile scrivere una matrice diagonale ad essa simile.

III

1) Determinare la parabola p avente fuoco in $F(1,1)$ e direttrice $d: \; x + y + 2 = 0$.

2) Determinare il punto $P \in p$ tale che la tangente a p in P sia parallela all'asse delle $\vec{x}$.

3) Studiare il fascio di coniche generato da p e dall'asse delle $\vec{y}$ contato due volte.

4) Determinare le rette in cui si spezzano le coniche riducibili del fascio.

Classe Ingegneria Informatica (A-B),(G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 12 Settembre 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

1) Determinare le equazioni cartesiane del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Studiare l'applicazione lineare $g : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ definita da

$$g(x, x, y, y, z, z) = (5x + y, kx + y - z, -(k+5)x - 2y + z, y + 2z)$$

al variare del parametro reale k.

II

1) Determinare la proiezione r' della retta $r:\ x - 2y + 1 = y + z = 0$, dal punto $P(1, 3, 3)$, sul piano $p:\ x - 4z + 1 = 0$ e la proiezione ortogonale r'' di r su p.

2) Determinare $r' \cap r''$.

III

1) Calcolare gli eventuali vertici della quadrica

$$Q:\ kx^2 - 2(k-1)xz + ky^2 - 6kyz + 2(5k-1)z^2 + 2z - k = 0$$

al variare del parametro reale k.

2) Classificare Q al variare di k.

Classe Ingegneria Informatica (A-B),(G-La)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 30 Settembre 2003

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (1,1,1,0)$, $v_4 = (0,1,-1,1)$ e le applicazioni $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, definite dalle relazioni

$$f(x,y,z,w) = \big(2x + 3kz + w, -3x + 4y + z, 7x - 4y + (5k+2)z + (k-1)w\big),$$

$$g(v_1) = (2,-3,7), \;\; g(v_2) = (2,k-1,3), \;\; g(v_3) = (8,2,5k+5), \;\; g(v_4) = (-5,3,-4k-7),$$

con k parametro reale.

1) Determinare il valore di k per cui $f = g$.

2) Calcolare $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ al variare di k.

3) Calcolare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ al variare di k.

II

Studiare la semplicità dell'endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= 0 \\
\varphi(e_2) &= -(h+1)e_1 + 2he_2 \\
\varphi(e_3) &= 2(1-h)e_1 + 3(h-1)e_2 + (3-h)e_3
\end{aligned}$$

al variare del parametro reale h, dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

III

Nello spazio siano r ed s le rette le cui equazioni parametriche sono rispettivamente $x = h+1, y = h, z = h$ e $x = k, y = k, z = 2k$ e sia $A(1,-1,1)$.

1) Determinare la retta incidente r ed s e passante per A.

2) Classificare la quadrica Q di equazione

$$(2x+z)^2 - y^2 - (z+2)^2 = 0.$$

3) Tra i piani passanti per s determinare quelli che intersecano Q in una conica spezzata.

CdL in Ingegneria Informatica (A-Faz), (Orp-Z)
CdL in Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 13 Dicembre 2003

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1-h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$
Si consideri l'equazione $AX = {}^tA$.

1) Determinare i valori di h per cui tale equazione ammette soluzioni.

2) Calcolare la soluzione nel caso $h = 4$.

II

1) Studiare, al variare del parametro reale k, l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & k-5 \\ 2 & 3-k & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Nel caso $k = 4$ calcolare $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

3) Nel caso $k = 4$ dire se f è semplice.

III

1) Determinare i fuochi e l'eccentricità dell'ellisse di equazione $15x^2 + 15y^2 = (x + 2y - 4)^2$.

2) Scrivere l'equazione dell'ellisse avente fuoco in $O(0, 0)$, relativa direttrice $x + 3y - 5 = 0$ ed eccentricità $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Calcolare l'area del triangolo individuato dai fuochi delle due ellissi.