CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra** assegnata il 15/11/2001-**A**

`Durata della prova: due ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi

$$V = \mathscr{L}((5,1,3,5),(1,2,3,4)) \text{ e } W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 3z = t - y = 0\}.$$

Determinare una base e la dimensione di $V + W$ e $V \cap W$.

II

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = t \\ x_1 + 2x_2 + (2t^2 - t)x_3 = t - 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t. Dire per quali valori di t è risolubile e calcolarne le soluzioni.

III

Stabilire per quali valori del parametro reale h esiste ed è unica l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ soddisfacente le seguenti condizioni

$$\begin{array}{l} f(1,-1,1) = (1,0,0,1) \\ f(2,1,-2) = (0,1,1,0) \\ f(0,h-3,h^2+h+2) = (7+h,-2,-2,-\frac{2}{3}h(h+5) \end{array}.$$

Tra le applicazioni trovate quali sono iniettive?

IV

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati il sottospazio $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0\}$ e l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ h & h & -h & 1-h \\ -h & -h & h+1 & h \end{pmatrix}, \ h \in \mathbb{R}.$$

Verificare che la restrizione di f a V induce un endomorfismo f' indipendente da h. Verificare che f' è semplice e determinare i suoi autospazi.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra** assegnata il 15/11/2001-**B**

```
Durata della prova:  due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

È assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h^2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ h^2-1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori di h A è invertibile in $\mathbb{R}^{3,3}$ ed in $\mathbb{C}^{3,3}$ e determinare l'eventuale matrice inversa.

II

Studiare l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita

$$\begin{array}{l} f(e_1) = -he_2 - e_3 \\ f(e_2) = he_1 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - 2e_2 \end{array}, \; h \in \mathbb{R}.$$

Determinare il valore di h per cui la restrizione di f a $V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x - 7y + z = 0\big\}$ non è iniettiva.

III

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ ed } S = \big\{A^n \mid n \in \mathbb{N}_0\big\} \subset \mathbb{R}^{2,2}.$$

Provare che $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(I, A)$ e studiare la semplicità dell'endomorfismo $f\colon \mathscr{L}(S) \to \mathscr{L}(S)$ così definito

$$f(I) = A^2, \; f(A) = A^3.$$

IV

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$f(x,y,z) = (2x - y + 3z, 4x + y + 2z);$$

siano $\mathscr{A} = ((2,1,-1),(0,-1,-1),(0,0,2))$ e $\mathscr{B} = ((-1,1),(-2,1))$. Determinare $M^{\mathscr{A},\mathscr{B}}(f)$.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Geometria (A-E)** assegnata l' 11/12/2001

`Durata della prova: due ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}.u$.

1) Determinare tutte le rette dello spazio parallele al piano $\pi : 3x + 12y - 4z - 13 = 0$ aventi distanza 1 da esso, ed incidenti l'asse $\vec{y}$ e l'asse $\vec{z}$.

2) Determinare l'equazione della conica Γ avente l'asse $\vec{x}$ come asintoto, tangente in $B(-1, -2, 0)$ alla retta $r : y - 3x - 1 = z = 0$ e passante per $A(1, 2, 0)$.

3) Determinare centro di simmetria, assi di simmetria, fuochi, direttrici ed una equazione canonica di Γ.

4) Determinare l'equazione dei cilindri contenenti la conica Γ e la conica $\Gamma' : x - y = 2x^2 + 2z^2 - 9y^2 + 4 = 0$.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Geometria (F-O)** assegnata l' 11/12/2001

`Durata della prova: due ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

I

Sia τ il piano di equazione $x+y-z+2=0$ ed r la retta di equazioni $y+2z-9=x+2y+z-7=0$.

Ia) Provare che $r \subset \tau$.

Ib) Determinare le rette di τ passanti per $Q(4,0,6)$ che formano con r un angolo $\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Ic) Tra le rette determinate nel punto precedente, sia s quella che interseca r in un punto P di ascissa 1. Determinare i punti R di r tali che il triangolo PQR abbia area $3\sqrt{14}$.

II

Determinare e studiare il luogo dei punti P del piano tali che $d(O,P) = kd(A,P)$ al variare di k parametro reale positivo, dove $O(0,0)$ e $A(1,0)$.

III

Determinare e studiare le coniche tangenti in $O(0,0)$ alla retta di equazione $x+2y=0$ e passanti per $B(2,0)$ e $C(0,3)$.

IV

Determinare il cono Q di vertice $V(1,0,1)$, contenente la conica di equazioni $z = x^2+y^2-1=0$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di piani contenenti la retta di equazioni parametriche $x=3u+2$, $y=u-1$, $z=u+1$. Determinare i piani di $\mathcal{F}$ che intersecano Q in parabole.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra (A-E)** assegnata il 13/12/2001

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Per quali valori del parametro reale t il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ (t+2)x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + (t-1)x_3 = 5 \\ (t+4)x_3 = t \end{cases}$$

è risolubile? Per quali valori di t la soluzione è unica?

II

Per quali valori del parametro reale h le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & h \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili? Diagonalizzarle quando è possibile.

III

In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $w_1 = (1,1,1,0)$, $w_2 = (0,1,0,1)$, $w_3 = (0,1,0,0)$ e lo spazio $W = \mathscr{L}(w_1, w_2, w_3)$.
Detto $f\colon W \to W$ l'endomorfismo definito dalle seguenti relazioni

$$f(w_1) = (1, 2h-1, 1, h),\ f(w_2) = (-1, h-1, -1, h),\ f(w_3) = (0, h-1, 0, h),$$

determinare i valori di h per cui f ammette l'autovalore $\lambda = -1$. Tra i valori di h trovati, determinare quello per cui f è semplice.
Per tale valore di h determinare una base di W costituita da autovettori.
Per il valore di h di cui al punto precedente determinare $f^{-1}\big((3,2,3,0)\big)$.

IV

È assegnato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ $V = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\big\}$.
Determinare il generico endomorfismo $f\colon V \to V$ tale che $(1,1,1,0) \in \operatorname{Ker} f$, $(0,1,1,1)$ è autovettore associato all'autovalore 1 e tale che $\operatorname{Im} f = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = z - t = 0\big\}$. Caratterizzare gli endomorfismi f che sono semplici.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra (F-O)** assegnata il 13/12/2001

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sono assegnate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & -4 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 8 \\ -8 & -24 & -15 \end{pmatrix}.$$

Ia) Provare che A è simile a B.

Ib) Determinare una matrice invertibile P tale che $B = PAP^{-1}$.

II

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nella variabile x, di grado minore o uguale a 3. Sia $V = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = 0\}$. Studiare l'applicazione lineare $\varphi\colon V \to V$, definita dalla legge

$$\varphi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x-1)[(a-b)x^2 + cx + 2a + d].$$

III

Sia

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & h \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Dire se esiste, al variare di $h \in \mathbb{R}$, una matrice $X \in \mathbb{R}^{3,3}$, $X \neq O$, tale che $CX = O$.

IV

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ sono assegnati i sottospazi

$$V_k = \mathscr{L}\big((1,1,-1,1,1),(1,-1,-1,-1,1),(1,3,-1,k,1)\big)$$

e

$$W_k = \big\{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 \mid x - ky + 3u - v = 0\big\},$$

dipendenti dal parametro reale k. Determinare, al variare di k, una base di $V_k \cap W_k$.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Geometria (A-E)** assegnata l' 8/1/2002

```
Durata della prova:  due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y}.u.$

1) Studiare il fascio φ di coniche
$$x^2 - y^2 + 2\lambda(xy - x) = 0$$
precisando la natura delle coniche, i punti base e le coniche spezzate.

2) Dati $P(0,2)$ e la retta $r:\ 2x - y + 1 = 0$, si trovino la polare p di P ed il polo R di r, rispetto alla generica conica c del fascio φ.
Trovare la conica γ luogo dei punti comuni a p ed alla retta PR al variare di c in φ.

3) Studiare la conica $\gamma:\ 2x^2 + 2y^2 + 8xy - 4y = 0$, determinando in particolare una sua equazione canonica, la sua eccentricità, centro, assi di simmetria, fuochi e direttrici.

4) Estendere il sistema assegnato ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O.\vec{x},\vec{y},\vec{z}.u.$ nello spazio.
Determinare l'equazione del cilindro avente γ come direttrice e generatrici parallele alla retta $x = y = -z$.

5) Determinare e studiare il luogo delle rette parallele al piano $\alpha : x - y + z - 1 = 0$ ed incidenti l'asse $\vec{x}$ e la retta $s:\ x - z + 1 = y - 1 = 0$.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Geometria (F-O)** assegnata l' 8/1/2002

```
Durata della prova:  due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Risolvere il seguente sistema di equazioni di secondo grado:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 - 5x - 5y + 4 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases} .$$

II

Studiare la natura della conica

$$\gamma \begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 - 4xz + 2yz + z^2 + 2x + 2y + 6z = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} .$$

Determinare asse di simmetria e vertice della proiezione γ' di γ sul piano $z = 0$ dal punto $P_\infty(1, 0, 1, 0)$.

III

Dopo aver verificato che i punti $A(0, 0, 2)$, $B(0, -1, 0)$ e $C(2, 0, 0)$ non sono allineati determinare il piano τ che li contiene. Calcolare centro, raggio ed equazioni della circonferenza passante per A, B e C.

IV

Determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti di coordinate $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ e $(2, 0)$. Determinare le eventuali ellissi del fascio di eccentricità $\frac{1}{2}$, e tracciarne il grafico.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra (A-E)** assegnata il 10/1/2002

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ è assegnato il sottospazio

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = z - t = 0\}.$$

Determinare il generico endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi = V$ e scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
Verificare che gli endomorfismi che soddisfano le condizioni assegnate non possono essere semplici.

II

È assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante le relazioni

$$f(1, 1, 1) = (2, 0, 0),\ f(0, 1, -1) = (1, 1, 0),\ f(1, 0, 1) = (1, -1, 0).$$

Dette $F = \big((1, 1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\big)$ ed $F' = \big((2, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\big)$ due basi di $\mathbb{R}^3$, determinare $M_f^{F,F}$, $M_f^{F',F'}$ e la relazione che lega le due matrici.
Determinare una base $\mathcal{A}$ del dominio ed una base $\mathcal{B}$ del codominio in modo che risulti

$$M_f^{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III

È assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$M_g = \begin{pmatrix} 2 & 2 & h \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di h per cui g risulta semplice.
Per il valore di h per cui g ammette l'autovalore 1 con molteplicità 2 diagonalizzare M_g e trovare la sua inversa.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica

Prova scritta di **Algebra (F-O)** assegnata il 10/1/2002

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & k & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ h \in \mathbb{R}$$

e sia $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è l'aggiunta di A. Nel caso in cui $\widehat{f}$ non è iniettiva studiare la restrizione di f a $\operatorname{Ker}\widehat{f}$.

II

Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ sono assegnate le basi $\mathscr{A} = \big(v_1, v_2, v_3\big) = \big((2,1,1),(1,1,2),(-9,-3,1)\big)$ e $\mathscr{B} = \big(u_1, u_2, u_3\big) = \big((10,2,-5),(1,0,-1),(-10,-1,8)\big)$.
Studiare la semplicità e determinare gli autospazi dell'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni

$$\begin{cases} f(v_1) = (k-1)u_1 + 2(k-1)u_2 + (k-1)u_3 \\ f(v_2) = (k-2)u_1 + (k-3)u_2 + (k-2)u_3 \\ f(v_3) = 6u_1 - 2u_2 + 3u_3 \end{cases}$$

III

Determinare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3-k & 3 \\ 2k & -4 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & k+h & k+4 \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri reali h e k.

IV

Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^5$ sono assegnati i sottospazi

$$V = \mathscr{L}\big((1,1,-1,-1,-1),(3,-1,1,1,0)\big) \text{ e } W_k = \mathscr{L}\big((-1,2,0,3,1),(-2,1,1,k+1,2)\big),$$

con k parametro reale.

a) Determinare gli eventuali valori di k per cui la somma di V e W_k è diretta.

b) Determinare equazioni cartesiane di $V + W_k$ al variare di k.

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Algebra** assegnata il 20/2/2002

```
Durata della prova: due ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

I

Studiare l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita dalle relazioni

$$\begin{aligned} &f(1,2,1,1) = (1,h,h-2)\\ &f(0,-1,1,3) = (-1,1,3)\\ &f(0,0,1,2) = (1,2,0)\\ &f(0,0,0,-1) = (h,-1,-1) \end{aligned}$$

dove h è un parametro reale.

II

Sia $\varphi\colon \mathbb{R}[z]_2 \to \mathbb{R}[z]_2$ l'endomorfismo così definito

$$\begin{aligned} &\varphi(1) = -1 + (k-2)z + (k-2)z^2\\ &\varphi(z) = 2k + (2k+1)z + (2k+5)z^2\\ &\varphi(z^2) = -k - 2kz - (2k+4)z^2 \end{aligned}$$

dove k è un parametro reale. Dopo aver verificato che -4 è un autovalore, studiare la semplicità di φ e, nei casi in cui esso è semplice, determinare una base di autovettori.

III

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = {}^tXA \right\}, \quad W = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid BX = X{}^tB \right\}.$$

Dopo aver provato che V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^{2,2}$, determinare una base di $V \cap W$.

IV

Siano $v_1 = (1,3,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (3,2,-1)$, e sia $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Provare che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare la matrice di passaggio $\mathfrak{M}^{\mathscr{E},\mathscr{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, dove $\mathscr{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

CORSI DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica e del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 19/3/2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

A-I

Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\}$ e consideriamo le relazioni

$$\begin{aligned}
&f(2, 1, 0, 0) = (3h + 7, h + 3, -h - 1, 0)\\
&f(1, 0, -1, 0) = (3h + 12, h + 2, -h - 2, 3)\\
&f(2, -1, 2, 3) = (h + 7, -2, 1 - h, 6)\\
&f(-1, 3, -5, -6) = (hk + 6h + 7k + 19, 2h - 2k + 5, -hk - 2h + k - 3, 6k + 3).
\end{aligned}$$

1) Determinare il valore di k affinché tali relazioni definiscano un endomorfismo $f\colon V \to V$.
2) Calcolare nucleo ed immagine di f al variare di h.

A-II

Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Dire se A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}^{3,3}$ o in $\mathbb{C}^{3,3}$.
2) Determinare in $\mathbb{C}^{3,3}$ una matrice diagonale simile ad A.
3) Determinare, sempre in $\mathbb{C}^{3,3}$, una matrice invertibile che diagonalizza A.

G-I

Sia γ la conica di equazione $3x^2 + 6xy + 11y^2 - 3 = 0$.

1) Dire di che conica si tratta e calcolarne gli assi di simmetria.
2) Determinare le rette r ed s passanti per $A(0, 1)$ e tangenti a γ.
3) Calcolare l'area del triangolo individuato da A e dai punti in cui r ed s intèrsecano γ.

G-II

Sono assegnate nello spazio le rette $r:\ hx + y - 1 = x + y + z + 1 = 0$ ed $s:\ (h + 2)x + (h + 2)y + (h + 2)z + 1 = 2x + 2y + z + 2 = 0$.

1) Determinare i valori di h per cui esse sono complanari.
2) Nei casi in cui sono complanari determinare le equazioni dei piani α e β che le contengono.
3) Scrivere l'equazione del cilindro avente vertice nel punto improprio di $\alpha \cap \beta$ e contenente la conica $x = y^2 + z^2 - 1 = 0$.

CORSI DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica e del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 5/4/2002

```
Durata della prova: tre ore.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.
È vietato consultare libri o appunti.
```

A-I

Siano
$$v_1 = (1, 2, -2), v_2 = (0, -1, 2), v_3 = (0, 0, -1)$$
e
$$A_1 = \begin{pmatrix} h-3 & 3-h \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3-h \\ 5-3h & 5-3h \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h-1 & h-1 \end{pmatrix}.$$
Studiare l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$ definita dalle relazioni $f(v_i) = A_i$, per $1 \leq i \leq 3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

A-II

Studiare la semplicità dell'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla legge
$$f(x, y, z, t) = (2x, 2y, y + t, y - z + 2t).$$
Determinare una base per ciascuno degli autospazi e calcolare l'equazione cartesiana della loro somma.

G-I

Determinare l'equazione della parabola $\mathfrak{p}$ avente come asse di simmetria la retta di equazione $2x-y = 0$ e tangente alla retta di equazione $3x - 4y - 7 = 0$ nel punto $A(\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$. Calcolare, inoltre, il raggio della circonferenza che iperoscula $\mathfrak{p}$ nel vertice.

G-II

Dire, giustificando la risposta, quale delle seguenti coniche è una circonferenza:
$$\gamma_1)\ 3x - z = 10x^2 + y^2 - 20x + 9 = 0; \quad \gamma_2)\ 3x - z = 4x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$
Scrivere quindi l'equazione del cono di vertice $V(0, 2, 1)$, contenente γ_2.

CORSI DI LAUREA
in
Ingegneria Informatica e del Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 18/6/2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

A-I

Dopo aver verificato che 2 è autovalore di molteplicità algebrica maggiore o uguale a due, studiare la semplicità dell'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definito dalla legge
$f(x, y, z, t) = (hx + (h-2)y + (h-2)z + (h-2)t, 2y + hz + ht, (h-2)x + (h-2)y - hz - (h+2)t, (2-h)x + (2-h)y + 2z + 4t)$, al variare di h, parametro reale.

A-II

Determinare la matrice associata, rispetto alle basi canoniche, alla generica applicazione lineare $g\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Ker} g = \mathscr{L}\big(x^3 - 1, x^2 + x\big)$, $g\big(x^3 + 2x^2\big) = (1, 2, 1)$ e $\operatorname{Im} g = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 0\big\}$.
Calcolare la controimmagine del vettore $(1, 5, 5)$.

G-I

Calcolare l'equazione della generica parabola avente fuoco nell'origine e direttrice passante per il punto $A(2, 2)$. Determinare il luogo geometrico descritto dai vertici di tali parabole.

G-II

Classificare la quadrica Φ di equazione $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 2z = 0$. Determinare il centro ed il raggio della circonferenza, intersezione di Φ con il piano $x - 2y - z = 0$.

CORSI DI LAUREA
in **Ingegneria**
Informatica (A-E), (F-O)
Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 9 Luglio 2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

A-I

Studiare la semplicità dell'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$, definito dalle relazioni

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1)x+y & ky+z \\ (8-k)x+(k-8)y+8z+kw & -w \end{pmatrix}$$

al variare del parametro reale k.

A-II

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Studiare le applicazioni lineari $g_h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, la cui matrica associata, rispetto alle basi canoniche è $(1-h)A + hB$.
Determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$, intersezione degli autospazi di dimensione maggiore di uno di g_0 e di g_1.

G-I

Calcolare l'equazione dell'iperbole γ avente per asintoti le rette $p:\ x+2y=0$ e $q:\ x-3y-5=0$ e passante per $A(1,0)$. Determinare quindi l'area del triangolo individuato dall'asse trasverso di γ, dalla retta q e dall'asse $\vec{x}$.

G-II

Nello spazio sono assegnate le rette

$$r_1:\ x+z=y-z-1=0,\ \ r_2:\ y+z=x+1=0,\ \ r_3:\ x-2z=y-z=0.$$

1) Verificare che esse sono a due a due sghembe.

2) Determinare e studiare il luogo geometrico descritto dalle rette incidenti r_1, r_2 ed r_3.

CORSI DI LAUREA
in **Ingegneria**
Informatica (A-E), (F-O)
Recupero Edilizio ed Ambientale

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 24 Settembre 2002

`Durata della prova: tre ore.`
`È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.`
`Usare la carta fornita dal Dipartimento di Matematica, riconsegnandola tutta.`
`È vietato consultare libri o appunti.`

A-I

Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & h & 2 \\ h & 3 & 1 & 1 \\ h+2 & 1 & 2h+1 & h \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale h, studiare f e determinare la controimmagine del vettore $(2,2,6)$.

A-II

Sia $\mathscr{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (0,0,-1)$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle relazioni $f(v_1) = (3,6,3)$, $f(v_2) = (h-2, 3h-3, 2h-1)$, $f(v_3) = (-h-6, -3h-14, -2h-7)$.

1) Determinare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche.

2) Studiare la semplicità di f.

G-I

Determinare e studiare le coniche del piano passanti per i punti $(1,2)$, $(-\sqrt{5},0)$, $(-1,-2)$, $(\sqrt{5},0)$. Determinare, in particolare, eventuali circonferenze e iperboli equilatere.

G-II

Determinare nello spazio i punti P_1', P_2', P_3', proiezioni ortogonali rispettivamente dei punti $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ e $P_3(0,0,1)$ sul piano di equazione $x+y-z=0$. Calcolare quindi l'area del triangolo individuato dai punti P_i'.