CdL in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 27 Giugno 2022

Durata della prova: 90 minuti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$M(f) = \begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & h-1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Nel caso in cui $h = 0$ studiare la semplicità di f.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette

$$r\colon \begin{cases} x+z=2 \\ y+z=0, \end{cases}, s\colon \begin{cases} z=2 \\ x-y=0, \end{cases}$$

   Verificare che r e s sono sghembe.Determinare la retta t ortogonale ed incidente con r ed s.

2) Fare lo studio completo della seguente conica Γ del piano $z = 0$ di equazione:

$$4x^2 - y^2 - 4x - 2y + 5 = 0.$$

   calcolando, in particolare, una sua forma canonica, il centro di simmetria, se esistono i due asintoti specificandone in tal caso se l'iperbole è equilatera o meno, assi di simmetria.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 18 luglio 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & -1 \\ 2 & -1 & h & 1 \\ 1 & -3 & 1 & h \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad M rispetto alla base canonica.

   Determinare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita dalla legge
$$g(x, y, z) = (x, y, z, 0).$$
   Nel caso $h = 2$ studiare la diagonalizzabilità dell'endomorfismo $g \circ f$ e calcolare gli autospazi.

II

1. Nello spazio si considerino i punti $A(1, 1, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 0, 2)$. Determinare un sistema di equazioni cartesiane di una retta passante per A, giacente sul piano ABC e che formi con la retta AB un angolo di 30 gradi.

2. Sia γ la parabola di equazione $x^2 - y = 0$. Sia S l'insieme dei 4 punti in cui γ interseca le rette $y - 1 = 0$ e $y - 4 = 0$. Determinare l'insieme delle ellissi passanti per S. Calcolare il centro ed il raggio della circonferenza passante per i suddetti 4 punti.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 16 settembre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo definito dalle condizioni

$$\begin{cases} f(1,0,0,0) = (1,1,1,1) \\ f(0,1,0,0) = (3,-1,1,2) \\ f \circ f = 0 \end{cases}$$

1. Determinare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica.
2. Determinare gli autospazi e studiare la diagonalizzabilità di f. Determinare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} f \oplus W = \mathbb{R}^4$.

II

1. Nello spazio, determinare la retta r passante per $P(1,-1,1)$, parallela al piano di equazione $x + y - z + 101 = 0$ e contenuta nel piano di equazione $x - 2y - 3 = 0$. Determinare i punti di r che distano $\sqrt{20}$ dal punto $A(1,0,0)$.
2. Nel piano, sia γ la conica di equazione $xy - 1 = 0$. Sia s_1 la retta tangente a γ in $Q(1,1)$ ed s_2 la retta passante per Q ortogonale a s_1. Sia $\delta = s_1 \cup s_2$. Studiare il fascio di coniche generato da γ e δ, determinando anche il luogo base.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 30 settembre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (x + 2hz, hx - hy + hz, -z)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare, ove possibile, una base di autovettori.
2. Dato l'endomorfismo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

   $$g(x, y, z) = (x, y, -hz)$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare $\phi = g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al variare di h. Studiare in particolare $\operatorname{Im} \phi$ e $\operatorname{Ker} \phi$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. . Sono assegnate le rette r, s e il piano π

   $$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}, \quad \pi : y + 2z - 2 = 0$$

   Sia A il punto di intersezione della retta r con la retta s. Determinare la retta u passante per A e ortogonale a π. Mostrare che r e u sono complanari e determinare il piano che le contiene.
2. Dati, nel piano $z = 0$, i punti $A = (3, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (2, 0)$ e $O = (0, 0)$ determinare e studiare il fascio di coniche passanti per i punti A, B, C e O.

Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria** del 5 dicembre 2022

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

È assegnato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & h+1 \\ 0 & 0 & h+1 \end{pmatrix},$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1. Studiare $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f$ e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$ e determinare, ove possibile, una base di autovettori.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1. Dato il piano $\pi : 4x - 2y + 6z - 1 = 0$, determinare il piano π' parallelo ad π e passante per $A = (0, 0, \frac{1}{3})$. Determinare inoltre il simmetrico di A rispetto al piano π.
2. Determinare e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alle rette $r : \; x + y = z = 0$ $s : \; 2x - y = z = 0$, rispettivamente, nei punti $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 2, 0)$.