Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello straordinario del 06.05.2016

Dato un sistema materiale costituito da un'asta omogenea AC, di massa M e lunghezza $6\,R$, vincolata a restare in un piano orizzontale Π, mentre il suo punto medio G é vincolato a scorrere su una circonferenza γ, fissa in Π, di raggio R e centro O. Sull'estremo C dell'asta agisce una forza

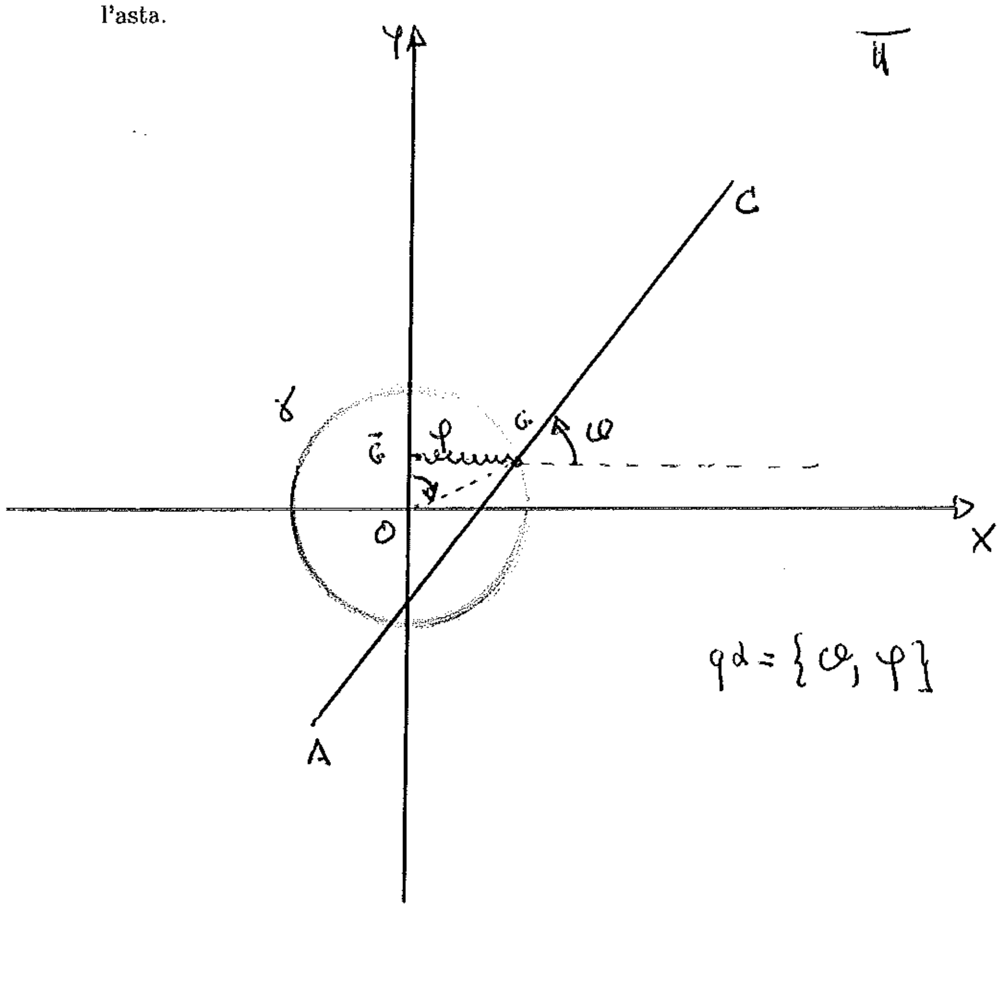
$$\left\{\mathbf{F}_1 = q\,(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{C}} \wedge \mathbf{B}),\ C\right\}$$

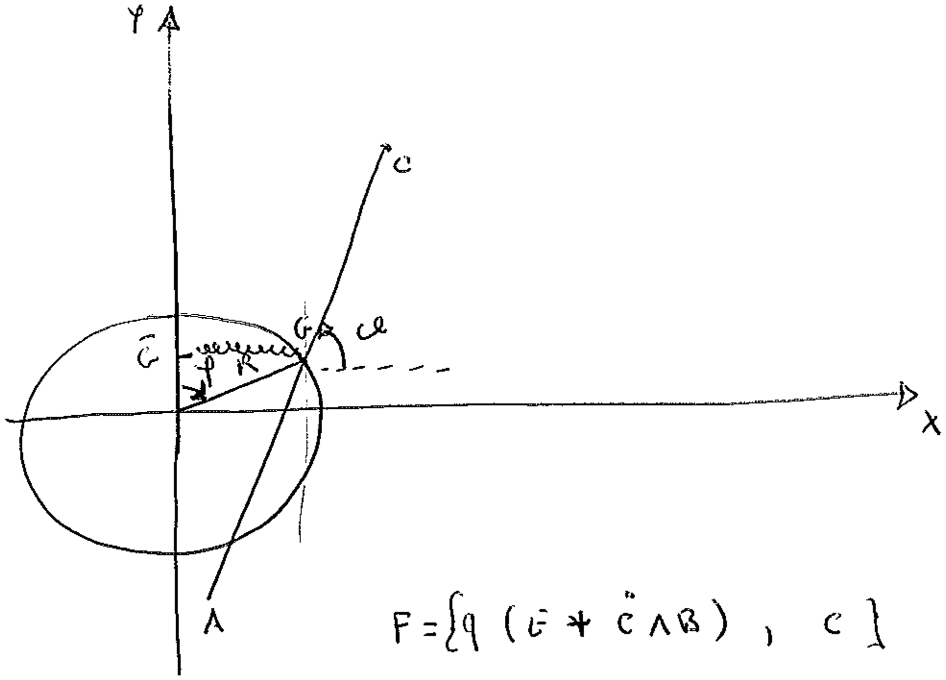
essendo la costante $q > 0$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ due vettori costanti il primo parallelo a Π ed il secondo ortogonale a Π, entrambi non nulli.
Consideriamo il riferimento riportato in figura, essendo gli assi x ed y appartenenti al piano Π, l'asse z ortogonale a Π, e l'origine O coincidente con il centro della circonferenza γ in modo tale che i vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ siano diretti rispettivamente lungo i semiassi positivi di x e z, essendo $\mathbf{E} = \{E, 0, 0\}$, $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ (con $E > 0$ e $B > 0$).
Sull'asta agisce inoltre la forza elastica

$$\{\mathbf{F}_2 = -k(G - \overline{G}),\ G\}$$

con $k > 0$ e $\overline{G}$ la proiezione di G sull'asse delle y. Supponendo tutti vincoli lisci si chiede di determinare

1. le configurazioni di equilibrio dall'asta.
2. le equazioni di moto, e gli eventuali integrali primi.
3. i moti in prima approssimazione attorno alle configurazioni di equilibrio, commentando la stabilità o instabilità delle suddette configurazioni in questa approssimazione, quando vale la condizione $\frac{qE}{4R} > k$
4. assumendo $k = 0$, esaminare se sono possibili moti in cui O e allineato con l'asta.





$\overline{AG} = 6R$

$\{F_1 = -k(G-\bar{G}),\ G\}$

(dove $\bar{G}$ proiezione di G sull'asse $\vec{y}$)

$F = \{q(E + \dot{C} \wedge B),\ C\}$ $\qquad q>0 \quad$ e $\dfrac{qE}{kR} > 1$

Scegliamo il riferimento in modo tale che $\underline{E} \equiv (E, 0, 0)$ $\quad \underline{B} \equiv (0, 0, B)$

con $E>0$ e $B>0$

$G = [R\sin\varphi,\ R\cos\varphi]$ $\qquad C \equiv [R\sin\varphi + 3R\cos\alpha,\ R\cos\varphi + 3R\sin\alpha,\ 0]$

$\dfrac{\partial C}{\partial\varphi} = (R\cos\varphi,\ -R\sin\varphi,\ 0)$ $\qquad \dfrac{\partial C}{\partial\alpha} = (-3R\sin\alpha,\ 3R\cos\alpha,\ 0)$

$Q_\varphi = q(\underline{E} + \dot{\underline{C}} \wedge \underline{B}) \cdot \dfrac{\partial C}{\partial\varphi} = q(E,0,0)\cdot(R\cos\varphi,\ -R\sin\varphi,\ 0)$

$+\ q\left[\left(\dfrac{\partial G}{\partial\alpha}\dot{\alpha} + \cancel{\dfrac{\partial G}{\partial\varphi}\dot{\varphi}}\right) \wedge \underline{B}\right] \cdot \dfrac{\partial C}{\partial\varphi} =$

$= qER\cos\varphi + q\dot{\alpha}\begin{vmatrix} -3R\sin\alpha & 3R\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B \\ R\cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$

$= qER\cos\varphi + q\dot{\alpha}\,B\begin{vmatrix} -3R\sin\alpha & 3R\cos\alpha \\ R\cos\varphi & -R\sin\varphi \end{vmatrix} =$

$= qER\cos\varphi - qB\dot{\alpha}\,(3R^2\sin\alpha\sin\varphi - 3R^2\cos\alpha\cos\varphi)$

$= qER\cos\varphi + qB\,3R^2\dot{\alpha}\,(\underbrace{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi}_{\cos(\alpha+\varphi)})$

$= qER\cos\varphi + 3R^2 qB\,\dot{\alpha}\cos(\alpha+\varphi)$

$$\boxed{Q_\varphi = qER\cos\varphi + 3R^2 qB\dot\theta \cos(\theta+\varphi)}$$

$$Q_\theta = q(E + \dot C \wedge B)\cdot\frac{\partial C}{\partial \theta} = q(E,0,0)(-3R\sin\theta,\ 3R\cos\theta,\ 0)$$

$$+ q\left[\left(\cancel{\frac{\partial C}{\partial\theta}\dot\theta} + \frac{\partial C}{\partial\varphi}\dot\varphi\right)\wedge B\right]\cdot\frac{\partial C}{\partial\theta} = -3RqE\sin\theta +$$

$$+ q\dot\varphi\begin{vmatrix} R\cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & B \\ -3R\sin\theta & 3R\cos\theta & 0\end{vmatrix} = -3RqE\sin\theta - qB\dot\varphi\begin{vmatrix} R\cos\varphi & -R\sin\varphi \\ -3R\sin\theta & 3R\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$= -3RqE\sin\theta - qB\dot\varphi\, 3R^2\left[\underbrace{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi}_{\cos(\theta+\varphi)}\right]$$

$$Q_\theta = -3RqE\sin\theta - 3R^2 qB\dot\varphi\cos(\theta+\varphi)$$

"FORZA ELASTICA" $\qquad G-\bar{G} = (R \sin\varphi, 0)$ $\qquad$ (3)

$F = -K(G-\bar{G})$ su G.

$$U = -\tfrac{1}{2}K\,(G-\bar{G})^2 = -\tfrac{1}{2}K R^2 \sin^2\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -K R^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$Q_\alpha^{elas} = -K(G-\bar{G})\cdot \cancel{\frac{\partial G}{\partial \alpha}} = 0$$

$$Q_\varphi^{elas} = -K(G-\bar{G})\cdot\frac{\partial G}{\partial \varphi} = -K\,(R\sin\varphi, 0)\cdot(R\cos\varphi, -R\sin\varphi) =$$

$$= -K R^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

Quindi

$$\begin{cases} Q_\alpha = -3RqE\sin\alpha - 3R^2 qB\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) \\ Q_\varphi = (qER - KR^2\sin\varphi)\cos\varphi + 3R^2 qB\dot{\alpha}\cos(\alpha+\varphi) \end{cases}$$

EQUILIBRIO (con atto di moto nullo $\dot{\varphi} = \dot{\alpha} = 0$)

$$Q_\alpha\Big|_{\dot{\alpha},\dot{\varphi}=0} = -3RqE\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi$$

$$\cos\varphi = 0 \qquad \varphi = \pm\pi/2$$

$$Q_\varphi\Big|_{\dot{\alpha}=\dot{\varphi}=0} = (qER - KR^2\sin\varphi)\cos\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{qE}{KR} \Rightarrow (\text{se } \sin\varphi \le 1)$$

AVREMO $\bar{\varphi} = \arcsin\left(\frac{qE}{KR}\right)$

(il caso $\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ già considerato)

Quindi:

Se $\frac{qE}{KR} > 1$ $\quad (\alpha,\varphi) = \left\{ S_1 \equiv (0, -\tfrac{\pi}{2});\ S_2 \equiv (0, \tfrac{\pi}{2});\ S_3 \equiv (\pi, -\tfrac{\pi}{2});\ S_4 \equiv (\pi, \tfrac{\pi}{2}) \right\}$

Se $\frac{qE}{KR} < 1$ $\quad$ OLTRE ALLE S_1, S_2, S_3, S_4 AVREMO $\left\{ S_5\,(0, \bar{\varphi});\ S_6 = (\pi, \pi-\bar{\varphi}),\ S_7\,(\pi, \bar{\varphi}),\ S_8 = (\pi, \pi-\bar{\varphi}) \right\}$

EQUAZIONI DI MOTO:

$$T_{ASTA} = \frac{1}{2} m \dot{G}^2 + T' \qquad T' = \frac{1}{2} I_z^G \dot{\alpha}^2$$

$$I_z^G = \sigma \int_{-L/2}^{L/2} s^2 \, ds = \frac{m}{L} \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds = \frac{m}{L} \frac{1}{3} \left[s^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{3} \frac{m}{L} 2 \cdot \frac{L^3}{8} = \frac{1}{12} m L^2$$

NEL NOSTRO CASO $L = 6R$ $\qquad I_z^G = \frac{1}{12} m \, 36 R^2 = 3 m R^2$

$$\dot{G} = [R\dot{\varphi}\cos\varphi, -R\dot{\varphi}\sin\varphi] \qquad \dot{G}^2 = R^2\dot{\varphi}^2$$

DA CUI:

$$T = \frac{1}{2} m R^3 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot (3 m R^2) \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2} m R^2 \dot{\alpha}^2$$

DA CUI:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 3 m R^2 \dot{\alpha} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = 3 m R^2 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi} \; ; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \; ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \ddot{\varphi}$$

QUINDI:

$$\begin{cases} 3 m R^2 \ddot{\alpha} = Q_\alpha = -3Rq\sigma \sin\alpha - 3R^2 q B \dot{\varphi} \cos(\alpha+\varphi) \\ m R^2 \ddot{\varphi} = Q_\varphi = (q\sigma R - kR^2 \sin\varphi)\cos\varphi + 3R^2 q B \dot{\alpha} \cos(\alpha+\varphi) \end{cases}$$

INTEGRALI PRIMI:

OSSERVIAMO CHE SE CALCOLO IL LAVORO COMPIUTO DAL TERMINE:

$$dL = (q \, \dot{c} \wedge B) \cdot dc = (q \, \dot{c} \wedge B) \cdot \dot{c} \, dt = 0$$

QUINDI COME LA FORZA DI LORENTZ O COME LA FORZA DI CORIOLIS NON COMPIE LAVORO QUINDI L'ENERGIA ESPRESSA COME SOMMA

$$E = T - U_{cons} = \text{cost.}$$

DOVE $U_{CONS} = q\,(E,0,0)\cdot(C-O) - \frac{1}{2}K\,(C-\hat{C})^2 =$

$$= qER\,(\sin\varphi + 3\cos\alpha) - \frac{1}{2}KR^2\sin^2\varphi$$

DA CUI:

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + \frac{3}{2}mR^2\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}KR^2\sin^2\varphi - qER\,(\sin\varphi + 3\cos\alpha) =$$

$= \text{COSTANTE}.$

$\Rightarrow$ RETRO

STUDIAMO I MOTI LINEARIZZATI ATTORNO ALLE CONF. DI EQUILIBRIO:

1) $s_1 = (0, -\frac{\pi}{2})$

$$Q_\alpha = \cancel{Q_\alpha|_{s_1}} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{s_1}\alpha + \cancel{\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \varphi}\Big|_{s_1}}(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) + \cancel{\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot\alpha}\Big|_{s_1}}\dot\alpha + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot\varphi}\Big|_{s_1}\dot\varphi$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{s_1} = -3RqE\alpha \qquad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \dot\varphi}\Big|_{s_1} \propto \cos(\alpha+\varphi)\Big|_{s_1} = 0$$

QUINDI

$$\boxed{\cancel{3}mR^{\cancel{2}}\ddot\alpha = -\cancel{3}\cancel{R}qE\alpha}$$

ANALOGAMENTE

$$Q_\varphi = \cancel{Q_\varphi|_{s_1}} + \cancel{\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \alpha}\Big|_{s_1}}\alpha + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\Big|_{s_1}(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \dot\alpha}\Big|_{s_1}\dot\alpha + \cancel{\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \dot\varphi}\Big|_{s_1}}\dot\varphi$$

$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\Big|_{s_1} = (qER + KR^2) \qquad \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \dot\alpha}\Big|_{s_1} \propto \cos(\alpha+\varphi)\Big|_{s_1} = 0$$

$$\boxed{mR^{\cancel{2}}\ddot\varphi = (qE\cancel{R} + KR^{\cancel{2}})(\varphi + \tfrac{\pi}{2})}$$

QUESTA SI PUO' ANCHE OTTENERE MOLTIPLICANDO LA 1ª EQUAZIONE
TUTTO PER $\dot{\theta}$ LA 2ª EQUAZIONE TUTTO PER $\dot{\varphi}$ E SOMMANDO

DA CUI:

$$3mR^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mR^2\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = -3Rq\sigma\dot{\theta}\sin\theta + q\sigma R\dot{\varphi}\cos\varphi - KR^2\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi$$

QUESTE POSSO ESSERE SUBITO INTEGRATE:

$$3mR^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$mR^2\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$-3Rq\sigma\dot{\theta}\sin\theta = 3Rq\sigma\frac{d}{dt}(\cos\theta)$$

$$q\sigma R\dot{\varphi}\cos\varphi = q\sigma R\frac{d}{dt}(\sin\varphi)$$

$$-KR^2\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{1}{2}KR^2\frac{d}{dt}(\sin^2\varphi)$$

DA CUI: $\frac{d}{dt}E = 0$ $\quad E = \text{cost}$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = -\dfrac{qE}{mR}\,\alpha \\[2ex] \ddot{\varphi} = \underbrace{\dfrac{(qE+KR)}{mR}}_{>0}\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$ $\quad \left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = \varphi_0 e^{\lambda t}$.

$\Rightarrow$ MOTI ARMONICI

(INSTABILITÀ)

$\Rightarrow$ MOTI IPERBOLICI.

2) $S_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$Q_\alpha = \left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha}\right|_{S_2} \alpha = -3RqE\,\alpha.$$

$$Q_\varphi = \left.\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{S_2}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) = (\underbrace{-qER+KR^2}_{<0})\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$; $\varphi - \frac{\pi}{2} = \rho_0 e^{\lambda t}$

DA CUI:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \underbrace{-\dfrac{qE}{mR}}_{<0}\,\alpha \\[2ex] \ddot{\varphi} = \underbrace{\dfrac{(-qE+KR)}{mR}}_{\substack{<0 \text{ se } \left(\frac{qE}{KR}>1\right) \\ >0 \text{ se } \left(\frac{qE}{KR}<1\right)}}\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$\rightarrow$ MOTI ARMONICI

$\rightarrow$ MOTI ARMONICI

$\rightarrow$ MOTI IPERBOLICI

STABILITÀ se $\frac{qE}{KR} > 1$

INSTABILITÀ se $\frac{qE}{KR} < 1$

3) $S_3 = \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$Q_\alpha = \left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha}\right|_{S_3}(\alpha-\pi) = 3RqE\,(\alpha-\pi)$$

$$Q_\varphi = \left.\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{S_3}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = (\underbrace{qER+KR^2}_{>0})\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha - \pi = \alpha_0 e^{\lambda t}$ $\quad \varphi+\frac{\pi}{2} = \varphi_0 e^{\lambda t}$.

DA CUI:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = \overbrace{\dfrac{qE}{mR}}^{>0}(\alpha-\pi) \\[2ex] \ddot{\varphi} = \underbrace{\dfrac{(qE+KR)}{mR}}_{>0}\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ MOTI IPERBOLICI

(INSTABILITÀ)

$\Rightarrow$ MOTI IPERBOLICI.

4) $S_4 = (\pi, \pi/2)$

$$Q_\alpha = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha}\Big|_{S_4} (\alpha - \pi) = \underbrace{3 R q \mathcal{E}}_{>0} (\alpha - \pi)$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}\Big|_{S_4} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \left(- q \mathcal{E} R + k R^2\right) \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

<0 se $\frac{q\mathcal{E}}{kR} > 1$

>0 se $\frac{q\mathcal{E}}{kR} < 1$

da cui:

$$\ddot{\alpha} = \overbrace{\frac{q\mathcal{E}}{mR}}^{>0} (\alpha - \pi)$$ moti esponenziali iperbolici $\Rightarrow$ (instabile)

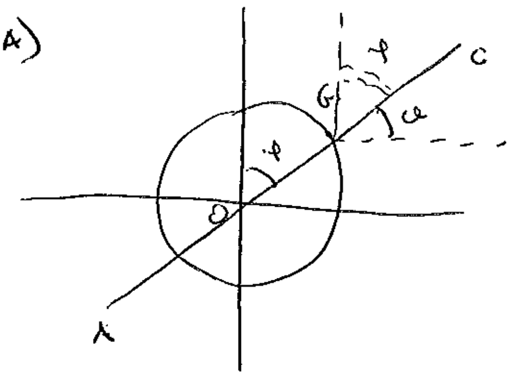
$$\ddot{\varphi} = \underbrace{\frac{(-q\mathcal{E} + kR)}{mR}}_{} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$ moti armonici

<0 se $\frac{q\mathcal{E}}{kR} > 1$

>0 se $\frac{q\mathcal{E}}{kR} < 1$ $\rightarrow$ moti iperbolici

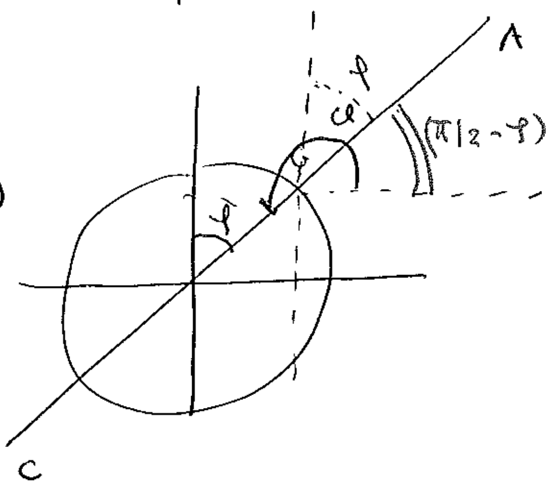
Esaminiamo se sono possibili moti in cui O è allineato con l'asta

A)



$$\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

B)



$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{3}{2}\pi - \varphi$$

Nel caso A) se sostituiamo $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ nella 1ª equazione avremo

$$-\cancel{3} m R^{\cancel{2}} \ddot{\varphi} = -\cancel{3}\cancel{R} q \mathcal{E} \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}^{\cos\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{q\mathcal{E}}{mR} \cos\varphi$$

dalla 2ª equazione

$$m R^2 \ddot{\varphi} = \left(q \mathcal{E} R - k R^2 \sin\varphi\right) \cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{(q\mathcal{E} - kR\sin\varphi)\cos\varphi}{mR}$$

(9)

QUESTE SONO COMPATIBILI SOLTANTO NEI CASI (TRANNE SE K=0)

$\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi$ OPPURE SE $\cos\varphi = 0$ $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

QUINDI NON SI HANNO "MOTI" COMPATIBILI (TRANNE SE K=0)

SE INCHEHNA K=0 AVREMO $\ddot{\varphi} = \frac{qE}{mR}\cos\varphi$ (ANCHE NON EQUAZIONI) QUINDI "MOTI" COMPATIBILI

CASO B) SOSTITUIAMO $\theta = \frac{3}{2}\pi - \varphi$

$$-\cancel{3}mR^2\ddot{\varphi} = -\cancel{3}\cancel{R}qE\overbrace{\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi - \varphi\right)}^{-\cos\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{qE}{mR}\cos\varphi$$

DALLA 2^{a}

$$mR^2\ddot{\varphi} = (qER - KR^2\sin\varphi)\cos\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{(qE - KR\sin\varphi)}{mR}\cos\varphi$$

CHE SONO COMPATIBILI SOLO QUANDO $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\pi/2$

(NON ABBIAMO MOTI COMPATIBILI MAI ANCHE SE K=0)