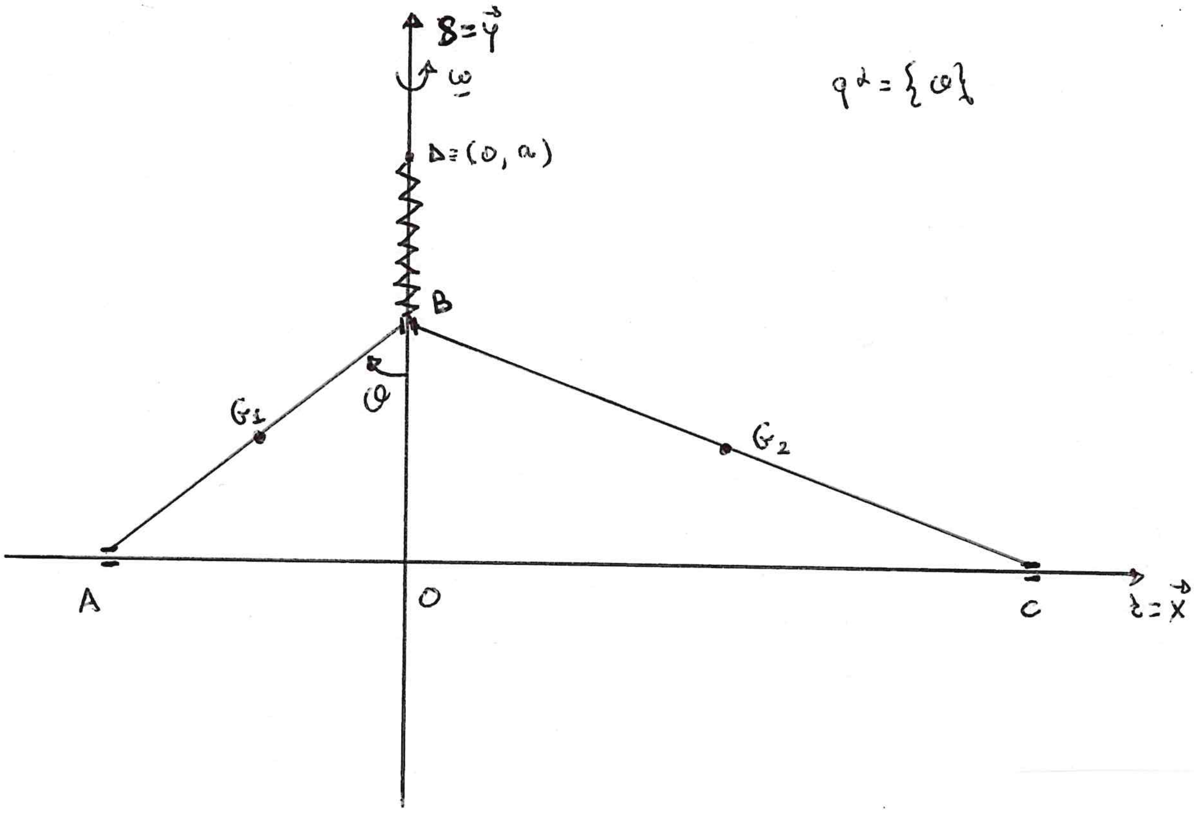
Università degli studi di Catania
Corso di laurea Triennale in Matematica
Prova scritta di Fisica Matematica
Appello del 25.02.2022

Un sistema materiale é costituito da due aste omogenee pesanti denominate rispettivamente $\overline{AB}$ di massa M_1 e lunghezza L_1 e $\overline{BC}$ di massa M_2 e lunghezza L_2 con $L_2 > L_1$, incernierate senza attrito in B. Il sistema, posto in un piano verticale Π, ha i punti A e C su una guida liscia orizzontale r (asse delle $\vec{x}$ in figura), mentre il punto B scorre senza attrito su una guida verticale s (asse delle $\vec{y}$ in figura), con O punto di intersezione tra r ed s. Sul sistema oltre alla forza peso agisce la forza elastica

$$\{F = -k\,(B - D),\ B\} \qquad \text{con} \quad k > 0$$

essendo $D = (0, a)$ un punto di s posto superiormente ad r con $a > L_1$. Inoltre il piano verticale Π ruota uniformemente, con velocitá angolare $\vec{\omega}$ attorno alla retta verticale s. Scegliendo come unica coordinata lagrangiana l'angolo ϑ tra la verticale s e l'asta $\overline{AB}$ (come in figura) si chiede di determinare

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio del sistema.
2. Ponendo per semplicitá $M_1 + M_2 = M$, studiare la stabilità-instabilità delle configurazioni di equilibrio sistema, assumendo che valga la condizione
$$\frac{2\,k\,a - M\,g}{2\,L_1\,(k + M\,\omega^2/3)} \geq 1.$$
3. Scrivere l'equazione di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
4. Nelle condizioni del punto 2. studiare i moti in prima approssimazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.



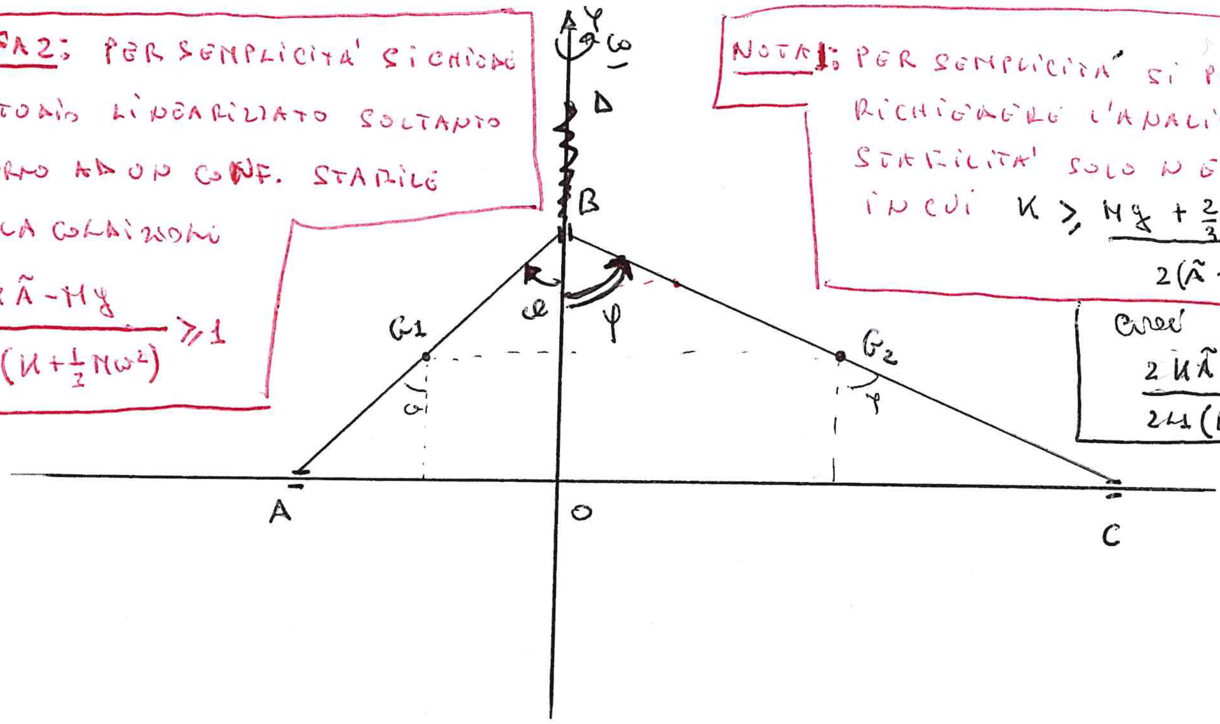
NOTA 2: PER SEMPLICITA' SI CHIEDE LO STUDIO LINEARIZZATO SOLTANTO ATTORNO AD UN CONF. STABILE CON LA CONDIZIONI

$$\frac{2K\tilde{A} - Mg}{2L_1\left(K+\frac{1}{3}M\omega^2\right)} \geq 1$$

NOTA 1: PER SEMPLICITA' SI PUO' RICHIEDERE L'ANALISI DELLA STABILITA' SOLO NEL CASO IN CUI $K \geq \dfrac{Mg + \frac{2}{3}ML_1\omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}$

cioè

$$\frac{2K\tilde{A} - Mg}{2L_1\left(K+\frac{1}{3}M\omega^2\right)} \geq 1$$



$\overline{AB} : \begin{cases} L_1 \\ M_1 \end{cases}$ $\quad \overline{BC} = \begin{cases} L_2 \\ M_2 \end{cases}$ $\quad$ CON $L_2 > L_1$

$G_1 \equiv \left\{ -\frac{L_1}{2} \operatorname{sen}\alpha, \frac{L_1}{2}\cos\alpha \right\}$

$G_2 = \left\{ \frac{L_2}{2} \operatorname{sen}\varphi, \frac{L_2}{2}\cos\varphi \right\}$

$A \equiv \{ -L_1 \operatorname{sen}\alpha, 0 \}$ $\quad C \equiv \{ L_2 \operatorname{sen}\varphi, 0 \}$

OSSERVO CHE $\overline{OB} = L_1 \cos\alpha = L_2 \cos\varphi \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{L_1}{L_2}\cos\alpha}$

$B \equiv \{ 0, L_1\cos\alpha \}$ $\quad D = \{ 0, \tilde{A} \}$ $\quad \tilde{A} > L_1$

FORZE:

FORZA PESO; FORZA ELASTICA; FORZA CENTRIFUGA

METODO DEL POTENZIALE

$$U_{peso} = -M_1 g(0,1)\cdot(G_1 - O) - M_2 g(0,1)\cdot(G_2 - O) = -M_1 g \frac{L_1}{2}\cos\alpha$$

$$-M_2 g \frac{L_2}{2}\boxed{\cos\varphi} = -\frac{1}{2}M_1 g L_1 \cos\alpha - \frac{1}{2}M_2 g \cancel{L_2}\cdot\boxed{\frac{L_1}{\cancel{L_2}}\cos\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}g(M_1+M_2)L_1\cos\alpha.$$

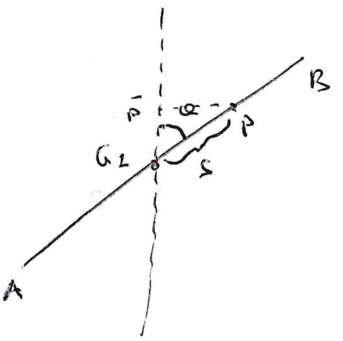
$$U_{elastica} = -\frac{1}{2}K(B-D)^2 = -\frac{1}{2}K(L_1\cos\alpha - \tilde{A})^2$$

$$U^{centr.}_{AB} = \frac{1}{2}\omega^2\int(P-\bar{P})^2\,dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^{AB}_{y,O}$$

$$U^{CONTR.}_{BC} = \frac{1}{2}\omega^2 \int (P-\bar{P})^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^{BC}_{y,O}$$

Dove $$I^{AB}_{y,O} = I^{AB}_{y,G_1} + M_1 (G_1-\bar{G}_1)^2$$ ($\bar{G}_1$ proiezione di G_1 sull'asse y)

$$I^{BC}_{y,O} = I^{AB}_{y,G_2} + M_2 (G_2-\bar{G}_2)^2$$ ($\bar{G}_2$ proiezione di G_2 sull'asse y)



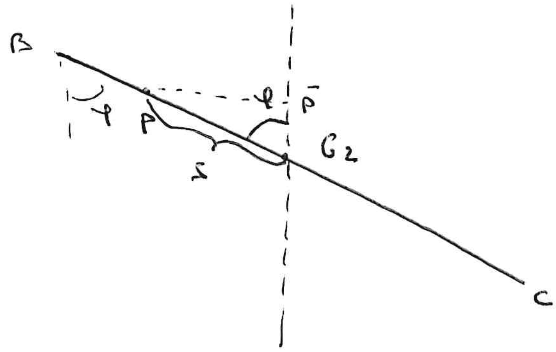
$$I^{AB}_{y,G_1} = \int_{-L_1/2}^{L_1/2} (s\,\text{sen}\,\alpha)^2 dm = \text{sen}^2\alpha \cdot \frac{M_1}{L_1}\int_{-L_1/2}^{L_1/2} s^2 ds$$

$$= \frac{M_1}{L_1}\text{sen}^2\alpha \cdot \left[\frac{s^3}{3}\right]_{-L_1/2}^{L_1/2} = \frac{M_1}{L_1}\text{sen}^2\alpha \cdot \frac{2}{3}\frac{L_1^3}{8}$$

$$= \frac{1}{12} M_1 L_1^2\,\text{sen}^2\alpha$$

$$I^{AB}_{y,O} = \frac{1}{12} M_1 L_1^2\,\text{sen}^2\alpha + M_1 \frac{L_1^2}{4}\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{3} M_1 L_1^2\,\text{sen}^2\alpha$$

$$U^{CONTR}_{AB} = \frac{1}{6} M_1 \omega^2 L_1^2\,\text{sen}^2\alpha$$



$$I^{BC}_{y,G_2} = \int_{-L_2/2}^{L_2/2} (s\,\text{sen}\,\varphi)^2 dM = \frac{1}{12} M_2 L_2^2\,\text{sen}^2\varphi$$

$$= \frac{1}{12} M_2 L_2^2 (1-\cos^2\varphi) =$$

$$= \frac{1}{12} M_2 L_2^2 - \frac{1}{12} M_2 \cancel{L_2^2}\left(\frac{L_1}{\cancel{L_2}}\right)^2\cos^2\alpha$$

$$I^{BC}_{y,O} = \frac{1}{12} M_2 L_2^2\,\text{sen}^2\varphi + M_2 \frac{L_2^2}{4}\text{sen}^2\varphi = \frac{1}{3} M_2 L_2^2\,\text{sen}^2\varphi$$

$$= \frac{1}{3} M_2 L_2^2 (1-\cos^2\varphi) = \frac{1}{3} M_2 L_2^2 - \frac{1}{3} M_2 \cancel{L_2^2}\left(\frac{L_1}{\cancel{L_2}}\right)^2\cos^2\alpha$$

$$I^{RC}_{Y,O} = \frac{1}{3} M_2 L_2^2 - \frac{1}{3} M_2 L_1^2 \cos^2\alpha$$ da cui

$$U^{contr}_{RC} = -\frac{1}{6} M_2 \omega^2 L_1^2 \cos^2\alpha + cost.$$

$$U_{TOT} = -\frac{1}{2} g (M_1 + M_2) L_1 \cos\alpha - \frac{1}{2} K L_1^2 \cos^2\alpha + K \tilde{A} L_1 \cos\alpha$$

$$+ \frac{1}{6} M_1 \omega^2 L_1^2 \underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} - \frac{1}{6} M_2 \omega^2 L_1^2 \cos^2\alpha + cost.$$

$$= -\frac{1}{2} g (\overbrace{M_1 + M_2}^{M}) L_1 \cos\alpha - \frac{1}{2} K L_1^2 \cos^2\alpha + K \tilde{A} L_1 \cos\alpha$$

$$- \frac{1}{6} (\overbrace{M_1 + M_2}^{M}) \omega^2 L_1^2 \cos^2\alpha + cost.$$

Poniamo per semplicità' $\boxed{M_1 + M_2 = M}$

$$\boxed{U = -\frac{1}{2} L_1 \cos\alpha \left\{ g M - 2 K \tilde{A} + L_1 \cos\alpha \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2 \right) \right\}}$$

da cui la sollecitazione

$$Q_\alpha = \frac{dU}{d\alpha} = \frac{1}{2} L_1 \sin\alpha \left\{ M g - 2 K \tilde{A} + \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2 \right) L_1 \cos\alpha \right\} +$$

$$+ \frac{L_1^2}{2} \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2 \right) \sin\alpha \cos\alpha =$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_\alpha = \frac{L_1}{2} \sin\alpha \left\{ M g - 2 K \tilde{A} + 2 \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2 \right) L_1 \cos\alpha \right\}}$$

"Equilibrio"

$$Q_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \pi \qquad (I)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2 K \tilde{A} - M g}{2 L_1 \left(K + \frac{1}{3} M \omega^2 \right)} \qquad (II)$$

LA II È SODDISFATTA SE $\quad -1 < \dfrac{2K\tilde{A} - Mg}{2L_1 (K + \frac{1}{3} M\omega^2)} < 1 \quad (*)$

(IL SEGNO DI UGUALE SI ESCLUDE PERCHÈ $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ CHE È UNA DELLE DUE SOLUZIONI DEL CASO (I) E ANALOGAMENTE $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$.)

DALLA (*) 1) $\quad -2L_1(K + \frac{1}{3}M\omega^2) < 2K\tilde{A} - Mg$

$$\Rightarrow Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2 < 2K(\tilde{A} + L_1) \Rightarrow \boxed{\frac{Mg - 2/3\, M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} + L_1)} < K}$$

2) $\quad 2K\tilde{A} - Mg < 2L_1 (K + \frac{1}{3} M\omega^2) \Rightarrow 2K(\tilde{A} - L_1) < Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{K < \frac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}}$$

(DOVE $\tilde{A} - L_1 > 0$ PERCHÈ $\tilde{A} > L_1$)

RICAPITOLANDO

1) ALLORA PER $\quad \dfrac{Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} + L_1)} < K < \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}$

AVREMO 4 SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_3 = \bar{\alpha}, \quad \alpha_4 = -\bar{\alpha}$$

CON $\quad \bar{\alpha} = \arccos\left\{ \dfrac{2K\tilde{A} - Mg}{2L_1 (K + \frac{1}{3} M\omega^2)} \right\}$

2) PER $\quad K \geq \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)} \quad$ E $\quad K \leq \dfrac{Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} + L_1)}$

⇓

(ESSENDO $K > 0$ $\quad Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2 > 0$)

AVREMO SOLO DUE CONFIGURAZIONI $\quad \alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \pi$

"STABILITÀ"

DERIVANDO LA $Q_\alpha = \frac{dU}{d\alpha}$ AVREMO

$$\frac{dQ_\alpha}{d\alpha} = \frac{d^2U}{d\alpha^2} = \frac{L_1}{2}\cos\alpha\left\{Mg - 2K\tilde{A} + 2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)L_1\cos\alpha\right\} -$$

$$- L_1^2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)\operatorname{sen}^2\alpha.$$

DA CUI:

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \frac{L_1}{2}\left\{Mg - 2K\tilde{A} + 2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)L_1\right\}$$

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} = -\frac{L_1}{2}\left\{Mg - 2K\tilde{A} - 2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)L_1\right\}$$

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_3,\alpha_4} = \frac{L_1}{2}\cos\alpha\left\{\overbrace{(Mg - 2K\tilde{A}) + \cancel{2}\cancel{\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)}\cancel{L_1}\frac{(2K\tilde{A} - Mg)}{\cancel{2L_1}\cancel{\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)}}}^{=0}\right\}$$

$$- L_1^2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)\operatorname{sen}^2\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_3,\alpha_4} < 0 \quad (\text{PERCHÈ } \alpha_3, \alpha_4 \neq 0, \pi$$

ESAMINIAMO I VARI CASI:

i) $\boxed{K < \dfrac{Mg - \frac{2}{3}ML_1\omega^2}{2(\tilde{A} + L_1)}} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = \pi\end{cases}$

IN QUESTO CASO $(Mg - 2K\tilde{A}) > 2\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)L_1 > 0 \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} > 0}$

NO MAX $\Rightarrow$ $\boxed{\text{INSTABILE}}$

$$\boxed{\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} = -\frac{L_1}{2}\left\{\underbrace{Mg - 2K\tilde{A} - 2L_1\left(K + \frac{1}{3}M\omega^2\right)}_{>0}\right\} < 0}$$

MAX $\boxed{\text{STABILE}}$

2) $\boxed{k > \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}}$

$Mg - 2k\tilde{A} < -2L_1 \left(k + \frac{1}{3} M\omega^2\right)$ $\Rightarrow$ $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} < 0$ MAX STABILE

$\Rightarrow$ $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} > 0$ NO MAX INSTABILE

3) $\boxed{\dfrac{Mg - \frac{2}{3} ML_1\omega^2}{2(\tilde{A}+L_1)} < k < \dfrac{Mg + \frac{2}{3} ML_1\omega^2}{2(\tilde{A}-L_1)}}$

in questo caso avremo: $-1 < \dfrac{2k\tilde{A} - Mg}{2L_1\left(k + \frac{1}{3}M\omega^2\right)} < 1$

da cui $\cancel{Mg - 2k\tilde{A} + 2L_1\left(k + \frac{1}{3}M\omega^2\right) > 0}$

$-2L_1\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right) < Mg - 2k\tilde{A} < 2L_1\left(k + \frac{1}{3}M\omega^2\right)$ $\Rightarrow$ $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} > 0$ INSTABILE

$\Rightarrow$ $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} > 0$ INSTABILE

mentre $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_3,\alpha_4} < 0$ $\Rightarrow$ MAX STABILE

4) ANALIZZIAMO IL CASO:

$\boxed{k = \dfrac{Mg - \frac{2}{3} ML_1\omega^2}{2(\tilde{A}+L_1)}}$ $\Rightarrow$ $Mg - 2k\tilde{A} = 2L_1\left(k + \frac{1}{3}M\omega^2\right)$

quindi $\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = 2L_1^2\left(k + \frac{1}{3}M\omega^2\right) > 0$ INSTABILE

$\left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} = 0$ (STUDIO LOCALE).

$$\frac{d^3U}{d\alpha^3} = -(Mg - 2k\tilde{A})\frac{L_1}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha + L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right) 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$- L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right) 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha.$$

$$\left.\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right|_{\alpha=\pi} = 0$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA IV^a

$$\frac{d^4U}{d\alpha^4} = -(Mg - 2k\tilde{A})\frac{L_1}{2}\cos\alpha - 4L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right)\left[\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha\right]$$

Quindi:

$$\boxed{\left.\frac{d^4U}{d\alpha^4}\right|_{\alpha=\pi}} = \frac{L_1}{2}(Mg - 2k\tilde{A}) - 4L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right)\Bigg|_{Mg-2k\tilde{A} = 2L_1\left(k+\frac{1}{3}M\right.}$$

$$\boxed{= -3L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right) < 0} \Rightarrow \boxed{\text{STABILE}}$$

5) ANALIZZIAMO IL CASO

$$\boxed{k = \frac{Mg + \frac{2}{3}ML_1\omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}} \Rightarrow Mg - 2k\tilde{A} = -2L_1\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right)$$

Quindi

$$\boxed{\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = 0}$$ STUDIO LOCALE

$$\left.\frac{d^3U}{d\alpha^3}\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left.\frac{d^4U}{d\alpha^4}\right|_{\alpha=0} = \left[-(Mg - 2k\tilde{A})\frac{L_1}{2} - 4L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right)\right]_{Mg-2k\tilde{A} = -2L_1\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right)}$$

$$= -3L_1^2\left(k+\frac{1}{3}M\omega^2\right) < 0 \Rightarrow \text{STABILE}$$

$$\boxed{\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} > 0} \Rightarrow \boxed{\text{INSTABILE}}$$

$\boxed{\text{RIEPILOGANDO:}}$

1) PER $\quad u \leq \dfrac{Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A}+L_1)}$ $\quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \text{INSTABILE} \\ \alpha_2 = \pi & \text{STABILE} \end{cases}$

2)

PER $\quad u \geq \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A}-L_1)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \text{STABILE} \\ \alpha_2 = \pi & \text{INSTABILE.} \end{cases}$

3) PER $\quad \dfrac{Mg - \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A}+L_1)} < u < \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A}-L_1)}$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 & \text{INSTABILE} \\ \alpha_2 = \pi & \text{INSTABILE} \\ \alpha_3, \alpha_4 & \text{SONO STABILI} \end{cases}$$

$\boxed{\text{"ENERGIA CINETICA"}}$

$T = T_{AB} + T_{BC}$

$T_{AB} = \frac{1}{2} M_1 \dot{G}_1^2 + T'_{AB} \qquad \text{CON} \quad T'_{AB} = \frac{1}{2} I_{z,G_1}^{AB} \dot{\alpha}^2$

$T_{BC} = \frac{1}{2} M_2 \dot{G}_2^2 + T'_{BC} \qquad \text{CON.} \quad T'_{BC} = \frac{1}{2} I_{z,G_2}^{BC} \dot{\varphi}^2$

$$I_{z,G_1}^{AB} = \int_{-L_1/2}^{L_1/2} s^2\, dm = \frac{M_1}{L_1} \left[\frac{s^3}{3} \right]_{-L_1/2}^{L_1/2} = \frac{M_1}{L_1} \cdot \frac{2}{3} \frac{L_1^3}{8} = \frac{1}{12} M_1 L_1^2$$

$$I_{z,G_2}^{BC} = \int_{-L_2/2}^{L_2/2} s^2\, dm = \frac{1}{12} M_2 L_2^2$$

$\dot{G}_1 = \left\{ -\frac{L_1}{2} \cos\alpha \dot{\alpha} ,\ -\frac{L_1}{2} \sin\alpha \dot{\alpha} \right\}$

$\dot{G}_2 = \left\{ \frac{L_2}{2} \cos\varphi \dot{\varphi} ,\ -\frac{L_2}{2} \sin\varphi \dot{\varphi} \right\}$

$$\dot{G}_1 = \frac{L_1^2}{4}\dot{\alpha}^2 \qquad \dot{G}_2 = \frac{L_2^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

$$T_{AB} = \frac{1}{8} M_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24} M_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2$$

$$T_{BC} = \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{6} M_1 L_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \dot{\varphi}^2}$$

CALCOLIAMO $\dot{\varphi}^2$. RICORDIAMO CHE $\cos\varphi = \frac{L_1}{L_2}\cos\alpha$

DA CUI RICAVIAMO $-\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi} = -\frac{L_1}{L_2}\operatorname{sen}\alpha\,\dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{L_1^2}{L_2^2}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\varphi}\dot{\alpha}^2$

$$= \frac{L_1^2}{L_2^2}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos^2\varphi}\dot{\alpha}^2$$

MA $1-\cos^2\varphi = 1 - \frac{L_1^2}{L_2^2}\cos^2\alpha$

$$= \frac{L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha}{L_2^2}$$

SOSTITUENDO AVREMO:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{L_1^2}{\cancel{L_2^2}} \cdot \frac{\cancel{L_2^2}}{L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha\,\dot{\alpha}^2$$

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{L_1^2\operatorname{sen}^2\alpha}{L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha}\dot{\alpha}^2}$$

$$T = \left\{\frac{1}{6} M_1 L_1^2 + \frac{1}{6} M_2 L_2^2 \cdot \frac{L_1^2\operatorname{sen}^2\alpha}{L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha}\right\}\dot{\alpha}^2$$

$$= \frac{1}{6} L_1^2 \left\{ M_1 + M_2 L_2^2 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha}\right\}\dot{\alpha}^2$$

$$T = \frac{L_1^2}{6(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left\{ M_1 L_2^2 - M_1 L_1^2 \cos^2\alpha + M_2 L_2^2 (1-\cos^2\alpha) \right\} \dot{\alpha}^2$$

$$\boxed{T = \frac{L_1^2}{6(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left\{ (M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right\} \dot{\alpha}^2}$$

equazione del moto:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{L_1^2}{3(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left\{ (M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right\} \dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{L_1^2}{3(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left\{ (M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right\} \ddot{\alpha}$$

$$+ \frac{d}{d\alpha}\left\{ \frac{2L_1^2}{6(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left\{ (M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right\}\right\} \dot{\alpha}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left\{ \frac{L_1^2}{6(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left[(M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right]\right\} \dot{\alpha}^2$$

da cui: equazione di Lagrange

$$\frac{L_1^2}{3(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left[(M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right] \ddot{\alpha}$$

NOTA: conviene non sviluppare questa derivata

$$+ \frac{d}{d\alpha}\left\{ \frac{L_1^2}{6(L_2^2 - L_1^2\cos^2\alpha)} \left[(M_1+M_2) L_2^2 - (M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)\cos^2\alpha \right]\right\} \dot{\alpha}^2 \qquad (1$$

$$= Q_\alpha = \frac{L_1}{2} \operatorname{sen}\alpha \left\{ Mg - 2K\tilde{A} + 2\left(K + \tfrac{1}{3}M\omega^2\right) L_1 \cos\alpha \right]$$

integrale primo l'energia ~~...~~ $E = T - U$.

MOTI LINEARIZZATI ATTORNO ALLA CONFIGURAZIONE STABILE

$\theta = 0$ PER $K \geq \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\tilde{A} - L_1)}$ (CIOÈ $Mg - 2K\tilde{A} < -2L_1(K + \frac{1}{3}M\omega^2)$)

SE LINEARIZZIAMO IL 1° MEMBRO DELL'EQUAZIONE DEL MOTO (IL TERMINE IN $\dot{\theta}^2$ NON POTRÀ DARE CONTRIBUTO NELLA LINEARIZZAZIONE PERCHÉ GIÀ ALMENO QUADRATICO)

$$\frac{L_1^2}{3(L_2^2 - L_1^2)} \cdot \left[(M_1 + \cancel{M_2}) L_2^2 - M_1 L_1^2 - \cancel{M_2 L_2^2} \right] \ddot{\theta} =$$

$$= \frac{L_1^2}{\cancel{3(L_2^2 - L_1^2)}} \cdot M_1 \cancel{(L_2^2 - L_1^2)} \ddot{\theta} = \frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta}$$

DA CUI AVREMO

$$\frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\theta} = \cancel{Q_\theta}\Big|_{\theta=0} + \frac{dQ_\theta}{d\theta}\Big|_{\theta=0} \theta =$$

$$= \frac{L_1}{2} \left[(M_1 + M_2) g - 2K\tilde{A} + 2(K + \frac{1}{3} M\omega^2) L_1 \right] \theta$$

DA CUI

$\ddot{\theta} = \alpha \theta$ SE $K > (Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2)/2(\tilde{A} - L_1)$

SI HA $Mg - 2K\tilde{A} < -2L_1(K + \frac{1}{3}M\omega^2)$ QUINDI AVREMO CHE

$$\alpha = \frac{3}{2 M_1 L_1} \left\{ Mg - 2K\tilde{A} + 2(K + \frac{1}{3} M\omega^2) L_1 \right] < 0$$

DA CUI CERCANDO SOLUZIONI $\theta = \theta_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = \alpha < 0$

$\lambda = \pm i \sqrt{|\alpha|}$ $\boxed{\text{MOTI ARMONICI.}}$

NOTA:
NOTIAMO CHE SE AVESSIMO CONSIDERATO IL CASO $K = \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(A - L_1)}$

AVREMO AVUTO $Mg - 2KA = -2L_1(K + \frac{1}{3} M\omega^2)$

DA CUI $\ddot{\theta} = 0$ $\dot{\theta} = \text{cost}$ $\theta = Kt + \theta_0$ MOTO UNIFORME

CHE FISICAMENTE NON È SIGNIFICATIVO E NON DICE NULLA SULLA STABILITÀ - INSTABILITÀ (SI DOVREBBE ANDARE AD UN ORDINE SUPERIORE DELLO SVILUPPO)

MOTO LINEARIZZATO ATTORNO ALLA CONFIGURAZIONE INSTABILE (12)

$\boxed{\varphi = \pi}$ CON $K > \dfrac{Mg + \frac{2}{3} M L_1 \omega^2}{2(\hat{A} - L_1)}$ (*)

L'EQUAZIONE LINEARIZZATA AVRÀ SEMPRE LA FORMA

$$\frac{1}{3} M_1 L_1^2 \ddot{\varphi} = \cancel{Q_\varphi}\Big|_{\varphi=\pi} + \underbrace{\underbrace{\frac{dQ_\varphi}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\pi}}_{-\frac{L_1}{2}\left[(Mg - 2K\hat{A}) - 2(K + \frac{1}{3}M\omega^2)L_1\right]}}_{>0} (\varphi - \pi)$$

DALLA (*) ABBIAMO CHE $Mg - 2K\hat{A} < -2L_1(K + \frac{1}{3}M\omega^2)$

QUINDI

$$\ddot{\varphi} = \alpha(\varphi - \pi) \qquad \text{CON} \quad \alpha = -\underbrace{\frac{3}{2M_1L_1}\left\{(Mg - 2K\hat{A}) - 2(K + \frac{1}{3}M\omega^2)L_1\right\}}_{>0}$$

CERCANDO SOLUZIONI $\varphi - \pi = \varphi_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = \alpha > 0$

DA CUI DUE RADICI REALI $\lambda = \pm\sqrt{\alpha} \Rightarrow$ MOTO IPERBOLICO.

-o-