**Università degli studi di Catania**
**Corso di laurea triennale in Fisica**
**Esame di Meccanica Analitica**
**Appello del 10.02.2023**

In un piano $\Pi$ si consideri un riferimento $\{O, x, y\}$, ed in questo piano sia dato un sistema materiale $S$ costituito da da due aste omogenee denominate rispettivamente $AC$ di massa $m_1$ e lunghezza $l_1$ e $AB$ di massa $m_2$ e lunghezza $l_2$ con $l_2 > l_1$, incernierate senza attrito in $A$. Gli estremi $B$ e $C$ delle due aste possono scorrere senza attrito sulla verticale $\vec{y}$ di $\Pi$ (vedi figura), mentre il punto $A$ scorre senza attrito sull'asse $\vec{x}$ del riferimento (vedi figura). Sul sistema $S$ agiscano solo le due forze elastiche

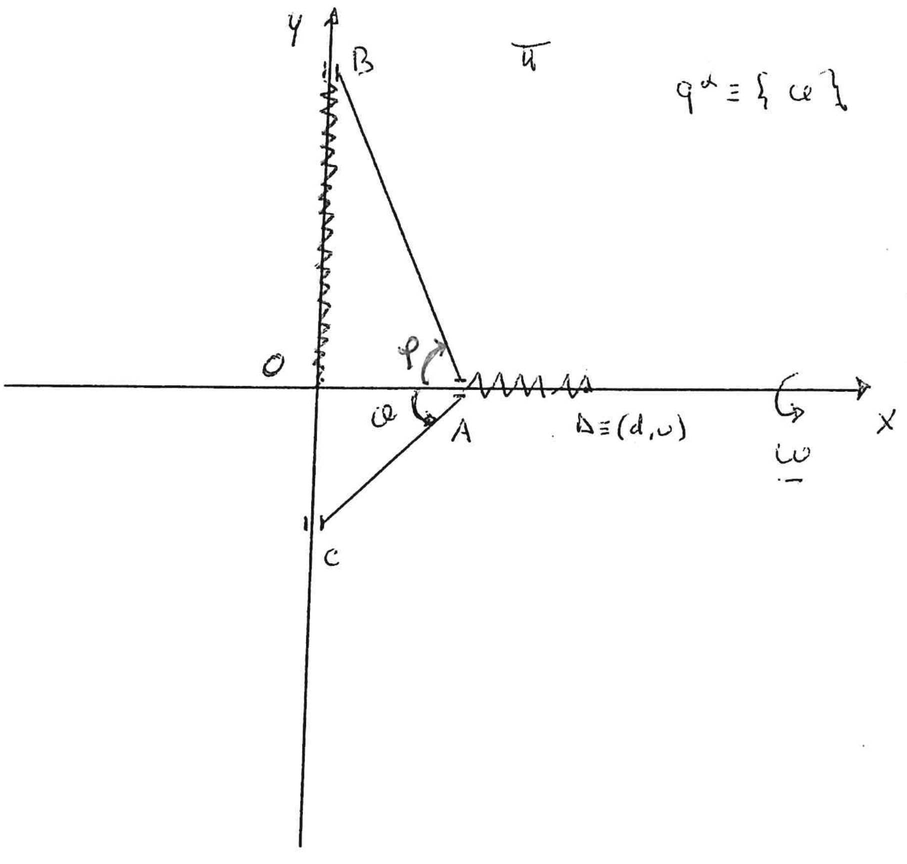
$$\{F_1 = -k\,(A - D),\ A\} \qquad \{F_2 = -k\,(B - O),\ B\} \qquad \text{con} \quad k > 0$$

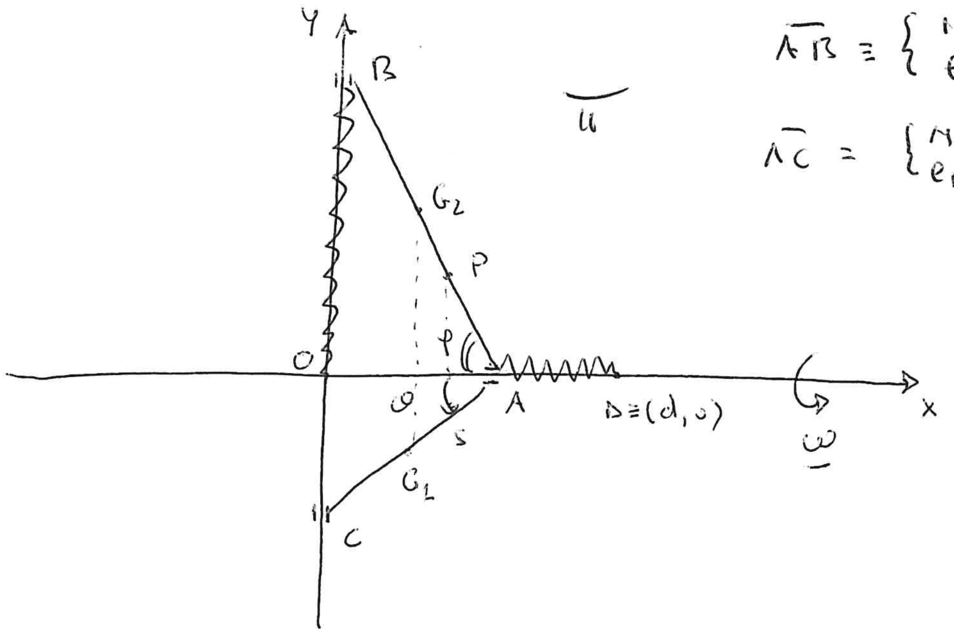
essendo $D = (d, 0)$ un punto fissato sull'asse $\vec{x}$ positivo. Inoltre il piano verticale $\Pi$, contenente il sistema $S$, ruota con velocitá angolare uniforme $\vec{\omega}$ attorno all'asse $\vec{x}$.
Scegliendo come unica coordinata lagrangiana l'angolo $\vartheta$ tra la distanza $OA$ e l'asta $AC$ (come in figura) si chiede di determinare, nel riferimento relativo

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio del sistema, studiandone la la stabilitá-instabilitá.

2. Scrivere l'equazione di moto, determinando gli eventuali integrali primi.

3. Studiare i moti in prima approssimazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.






$\overline{AB} \equiv \begin{cases} M_2 \\ \ell_2 \end{cases}$ $\qquad$ $\overline{AC} = \begin{cases} M_1 \\ \ell_1 \end{cases}$ $\qquad$ con $\ell_2 > \ell_1$

$G_1 = \left\{ \frac{\ell_1}{2} \cos\alpha \,,\, -\frac{\ell_1}{2} \operatorname{sen}\alpha \right\}$ $\qquad$ $G_2 \equiv \left\{ \frac{\ell_2}{2} \cos\varphi \,,\, \frac{\ell_2}{2} \operatorname{sen}\varphi \right\}$

$B \equiv \{ 0 \,,\, \ell_2 \operatorname{sen}\varphi \}$ $\qquad$ $A \equiv ( \ell_1 \cos\alpha \,,\, 0 )$

$C \equiv ( 0 \,,\, -\ell_1 \operatorname{sen}\alpha )$ $\qquad$ $D \equiv ( d \,,\, 0 )$

Con la condizione $\overline{OA} = \ell_1 \cos\alpha = \ell_2 \cos\varphi \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{\ell_1}{\ell_2} \cos\alpha}$ (*)

$F_1 = \{ -K(A-D) \,,\, A \}$ $\qquad$ $F_2 \equiv \{ -K(B-O) \,,\, B \}$ e le forze centrifughe agenti sulle due aste.

A cui: 1) $U_{F_1} = -\frac{1}{2} K (A-D)^2 = -\frac{1}{2} K ( \ell_1 \cos\alpha - d )^2 = -\frac{1}{2} K [ \ell_1^2 \cos^2\alpha - 2 d \ell_1 \cos\alpha ] + c$

2) $U_{F_2} = -\frac{1}{2} K (B-O)^2 = -\frac{1}{2} K \ell_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi = -\frac{1}{2} K \ell_2^2 (1 - \cos^2\varphi) =$

$= -\frac{1}{2} K \ell_2^2 + \frac{1}{2} K \cancel{\ell_2^2} \cdot \frac{\ell_1^2}{\cancel{\ell_2^2}} \cos^2\alpha = \frac{1}{2} K \ell_1^2 \cos^2\alpha + \tilde{c}$

Quindi $\boxed{U_{F_1} + U_{F_2} = K d \ell_1 \cos\alpha + \hat{c}}$

Forze centrifughe: $U_{AB}^{cent} = \frac{1}{2} \omega^2 I_{yO}^{AB}$ $\qquad$ $U_{AC}^{cent} = \frac{1}{2} \omega^2 I_{yO}^{AC}$

$I_{yO}^{AB} = \int s^2 \operatorname{sen}^2\varphi \, dm = \operatorname{sen}^2\varphi \int_0^{\ell_2} s^2 \, dm = \frac{M_2}{\ell_2} \cdot \operatorname{sen}^2\varphi \, \frac{\ell_2^3}{3} = \frac{1}{3} M_2 \ell_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi$

$\frac{1}{3} M_2 \ell_2^2 \cdot \left(1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \cos^2\alpha\right) = -\frac{1}{3} M_2 \ell_1^2 \cos^2\alpha + K$

Quindi $I^{AB}_{x,0} = -\frac{1}{3} M_2 \ell_1^2 \cos^2\alpha + k$ $\Rightarrow$ $\boxed{U^{cent}_{AB} = -\frac{1}{6}\omega^2 M_2 \ell_1^2 \cos^2\alpha + k_1}$

Analogamente:

$$I^{AC}_{x,0} = \int s^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, dm = \operatorname{sen}^2\alpha \int_0^{\ell_1} s^2 \, dm = \frac{1}{3} M_1 \ell_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$= \frac{1}{3} M_1 \ell_1^2 (1-\cos^2\alpha) = -\frac{1}{3} M_1 \ell_1^2 \cos^2\alpha + \tilde{k}$$

da cui $U^{cent}_{AC} = -\frac{\omega^2}{6} M_1 \ell_1^2 \cos^2\alpha + k_2$

$$\boxed{U^{cent}_{tot} = -\frac{1}{6}(M_1+M_2)\omega^2 \ell_1^2 \cos^2\alpha}$$

il potenziale totale assume quindi l'espressione:

$$\boxed{U_{tot} = U = -\frac{1}{6}(M_1+M_2)\omega^2 \ell_1^2 \cos^2\alpha + k d \ell_1 \cos\alpha + \hat{c}}$$

$$U = -\frac{1}{6}\underbrace{(M_1+M_2)}_{M}\,\omega^2 \ell_1^2 \cos^2\alpha + K d \ell_1 \cos\alpha + c$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_\alpha &= -\frac{1}{6} M \omega^2 \ell_1^2 (-2 \sin\alpha \cos\alpha) - K d \ell_1 \sin\alpha \\ &= \frac{1}{3} M \omega^2 \ell_1^2 \sin\alpha \cos\alpha - K d \ell_1 \sin\alpha \end{aligned}}$$

$$Q_\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha \, \ell_1 \left\{ \frac{M\omega^2 \ell_1}{3} \cos\alpha - K d \right\} = 0$$

$$\sin\alpha = 0 \qquad \alpha = 0, \pi$$

da cui:

$$\cos\alpha = \frac{3Kd}{M\omega^2 \ell_1} \qquad \text{con} \qquad \frac{3Kd}{M\omega^2\ell_1} < 1 \Rightarrow K < \frac{M\omega^2 \ell_1}{3d}$$

quindi se:

1) $K > \dfrac{M\omega^2 \ell_1}{3d}$ 2 sole configurazioni $S_1 = 0$ ed $S_2 = \pi$

2) $K < \dfrac{M\omega^2 \ell_1}{3d}$ 4 configurazioni $S_1 = 0$, $S_2 = \pi$, $S_3 = \bar{\alpha}$ $S_4 = -\bar{\alpha}$

con $\bar{\alpha} = \arccos\left\{ \dfrac{3Kd}{M\omega^2 \ell_1} \right\}$

(non consideriamo il caso in cui $K = \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

che è già considerata)

Stabilità:

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} = \frac{1}{3} M\omega^2 \ell_1^2 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - K d \ell_1 \cos\alpha.$$

1) $S_1 = 0$ ($\alpha = 0$)

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{S_1} = \frac{1}{3} M \omega^2 \ell_1^2 - K d \ell_1$$

da cui:

1) $K > \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow K d \ell_1 > \dfrac{M\omega^2\ell_1^2}{3} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{S_1} < 0 \Rightarrow$ stabile

2) $K < \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow K d \ell_1 < \dfrac{M\omega^2\ell_1^2}{3} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{S_1} > 0 \Rightarrow$ instabile

3) $K = \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{S_1} = 0$ (studio locale)

NEL CASO 1) CALCOLIAMO LE DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{d^3 U}{d\alpha^3} = -\frac{4}{3} M\omega^2 \ell_1^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + Kd\ell_1 \operatorname{sen}\alpha \Big|_{S_1(\alpha=0)} = 0$$

$$\frac{d^4 U}{d\alpha^4} = -\frac{4}{3} M\omega^2 \ell_1^2 (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + Kd\ell_1 \cos\alpha \Big|_{S(\alpha=0)} =$$

$$= -\frac{4}{3} M\omega^2 \ell_1^2 + Kd\ell_1 \Big|_{K=\frac{M\omega^2\ell_1}{3d}} = -M\omega^2\ell_1 < 0 \Rightarrow \text{STABILE}$$

2) $S_1 = \pi$ $(\alpha = \pi)$

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=\pi} = \frac{1}{3} M\omega^2 \ell_1^2 + Kd\ell_1 > 0 \Rightarrow \text{INSTABILE.}$$

3) $S_3, S_4 \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha}$, $\alpha = -\bar{\alpha}$ $\cos\bar{\alpha} = \frac{3Kd}{M\omega^2\ell_1}$

SE RISCRIVIAMO LA $\frac{d^2 U}{d\alpha^2} = \frac{1}{3} M\omega^2\ell_1^2 [2\cos^2\alpha - 1] - Kd\ell_1 \cos\alpha$

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\Big|_{S_3,S_4} = \frac{1}{3} M\omega^2\ell_1^2 \left\{ 2\left(\frac{3Kd}{M\omega^2\ell_1}\right)^2 - 1 \right\} - Kd\cancel{\ell_1} \cdot \frac{3Kd}{M\omega^2\cancel{\ell_1}}$$

$$= -\frac{1}{3} M\omega^2\ell_1^2 + \frac{2}{3}(\cancel{M\omega^2\ell_1})\cancel{\ell_1} \frac{9K^2d^2}{(M\omega^2\cancel{\ell_1})^2} - 3\frac{(Kd)^2}{M\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{3} M\omega^2\ell_1^2 + 3\frac{(Kd)^2}{M\omega^2} = \frac{M\omega^2\ell_1^2}{3}\left\{ -1 + \frac{(3Kd)^2}{(M\omega^2\ell_1)^2} \right\}$$

MA $S_3$ ED $S_4$ SI HANNO SOLO SE $K < \frac{M\omega^2\ell_1}{3d}$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3Kd}{M\omega^2\ell_1} < 1 \Rightarrow \left(\frac{3Kd}{M\omega^2\ell_1}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{(3Kd)^2}{(M\omega^2\ell_1)^2} - 1 < 0$$

DA CUI $\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\Big|_{S_3,S_4} < 0 \Rightarrow$ "STABILE"

ENERGIA CINETICA

$$T_{AC} = \frac{1}{2} M_1 \dot{G}_1^2 + \frac{1}{2} I^{AC}_{z,G_1} \dot{\alpha}^2$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M_2 \dot{G}_2^2 + \frac{1}{2} I^{AB}_{z G_2} \dot{\varphi}^2$$

$$I^{AC}_{z,G_1} = \int_{-\ell_1/2}^{\ell_1/2} s^2 \, dm = \frac{M_1}{\ell_1} \frac{2}{3} \frac{\ell_1^3}{8} = \frac{1}{12} M_1 \ell_1^2$$

$$I^{AB}_{z,G_2} = \int_{-\ell_2/2}^{\ell_2/2} s^2 \, dm = \frac{1}{12} M_2 \ell_2^2$$

$$\dot{G}_1 = \left\{ -\frac{\ell_1}{2} \sin\alpha \, \dot{\alpha} , -\frac{\ell_1}{2} \cos\alpha \, \dot{\alpha} \right\} \Rightarrow \dot{G}_1^2 = \frac{\ell_1^2}{4} \dot{\alpha}^2$$

$$\dot{G}_2 = \left\{ -\frac{\ell_2}{2} \sin\varphi \, \dot{\varphi} , \frac{\ell_2}{2} \cos\varphi \, \dot{\varphi} \right\} \Rightarrow \dot{G}_2^2 = \frac{\ell_2^2}{4} \dot{\varphi}^2$$

Quindi:

$$\begin{cases} T_{AC} = \frac{1}{8} M_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{24} M_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{6} M_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 \\ T_{AB} = \frac{1}{8} M_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} M_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} M_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}^2 \end{cases}$$

PER DETERMINARE $\dot{\varphi}$ DERIVIAMO LA (*) (DI PAG. 2)

$$-\sin\varphi \, \dot{\varphi} = -\frac{\ell_1}{\ell_2} \sin\alpha \, \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\varphi} \dot{\alpha}^2$$

da cui
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \frac{\sin^2\alpha \, \dot{\alpha}^2}{1 - \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 \cos^2\alpha} = \frac{\ell_1^2 \sin^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha} \dot{\alpha}^2$$

$$\boxed{T_{AB} = \frac{1}{6} M_2 \ell_2^2 \cdot \frac{\ell_1^2 \sin^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha} \dot{\alpha}^2}$$

QUINDI:

$$T = \frac{1}{6} M_1 \ell_1^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} M_2 \ell_2^2 \cdot \frac{\ell_1^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha} \dot{\alpha}^2$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha} \left\{ M_1 (\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha) + M_2 \ell_2^2 (1 - \cos^2\alpha) \right\} \dot{\alpha}^2$$

cioè

$$\boxed{T = \frac{\ell_1^2}{6[\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha]} \left\{ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \dot{\alpha}^2}$$

DA CUI LE EQUAZIONI:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\ell_1^2}{3[\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha]} \left\{ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right\} \dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\ell_1^2}{3(\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha)} \left\{ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \ddot{\alpha}$$

$$+ \underbrace{\frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{\ell_1^2}{3(\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha)} \left[ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \right\} \dot{\alpha}^2}_{(*)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \underbrace{\frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{\ell_1^2}{6(\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha)} \left[ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \right\} \dot{\alpha}^2}_{(**)}$$

<u>NOTA:</u> NON CONVIENE SVILUPPARE I TERMINI (*), (**) E (***), TANTO NELLA LINEARIZZAZIONE NON POTRANNO COMPARIRE ESSENDO TERMINI IN $\dot{\alpha}^2$

DA CUI L'EQUAZIONE DI LAGRANGE.

$$\frac{\ell_1^2}{3(\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos^2\alpha)} \left[ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1^2 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \ddot{\alpha}$$

$$+ \underbrace{\frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{\ell_1^2}{6(\ell_2^2 - \ell_1^2 \cos 2\alpha)} \left[ (M_1 + M_2) \ell_2^2 - (M_1 \ell_1 + M_2 \ell_2^2) \cos^2\alpha \right] \right\}}_{(***)} \dot{\alpha}^2$$

$$= Q_\alpha = \frac{1}{3} M \omega^2 \ell_1^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha - K d \ell_1 \operatorname{sen}\alpha$$

INTEGRALE PRIMO: $E = T - U$

$\boxed{\text{MOTI LINEARIZZATI}}$:

1) SVILUPPIAMO ATTORNO A: $\alpha = 0$

$$\frac{\ell_1^2}{3(\ell_2^2-\ell_1^2)}\left[(M_1+\cancel{M_2})\ell_2^2 - M_1\ell_1^2 - \cancel{M_2\ell_2^2}\right]\ddot{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{3}M_1\ell_1^2\ddot{\alpha} = \cancel{Q_\alpha}\Big|_{S_1} + \overbrace{\frac{dQ_\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}}^{\frac{1}{3}M\omega^2\ell_1^2 - kd\ell_1}\alpha$$

⇐ DALLA ANALISI DELLA STABILITA' BASTA VEDERE $V_{\alpha\alpha}|_{\alpha=0}$

DA CUI:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{M_1\ell_1^{\cancel{2}}}\left[\frac{1}{3}M\omega^2\ell_1^{\cancel{2}} - kd\cancel{\ell_1}\right]\alpha = A\alpha.$$

DOVE $A = \dfrac{3d}{M_1\ell_1}\left[\dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} - k\right]$

QUINDI SE:

$$\begin{cases} k > \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} & A < 0 \\ k < \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} & A > 0 \\ k = \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} & A = 0 \end{cases}$$

SE CERCHIAMO SOLUZIONI $\alpha = \alpha_0 e^{\lambda t}$

$$\begin{cases} k > \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow \lambda^2 = A < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{|A|} & \text{MOTI ARMONICI} \\ k < \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} \Rightarrow \lambda^2 = A > 0 = \lambda = \pm\sqrt{A} & \text{MOTI IPERBOLICI} \\ k = \dfrac{M\omega^2\ell_1}{3d} = \lambda^2 = 0 & \end{cases}$$

MOTI UNIFORMI, CHE NON DANNO ALCUNA INFORMAZIONE, IN QUANTO SI DOVREBBE CONSIDERARE UNO SVILUPPO ~~AL~~ II° ORDINE PER AVERE INFORMAZIONI FISICHE.

QUESTA PARTE E' SVOLTA MA NON RICHIESTA NEL TESTO DEL COMPITO

2) SVILUPPO ATTORNO A $\alpha = \bar{u}$

$$\frac{1}{3} M_1 \ell_1^2 \ddot{\alpha} = \cancel{Q_\alpha\Big|_{\alpha=\bar{u}}} + \underbrace{\frac{d Q_\alpha}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\bar{u}}}_{\frac{1}{3} M \omega^2 \ell_1^2 + K d \ell_1} (\alpha - \bar{u})$$

$\Leftarrow$ DALLA ANALISI SULLA STABILITA' $V_{\alpha\alpha}\big|_{\alpha=\bar{u}}$

DA CUI:

$$\ddot{\alpha} = \frac{3d}{M_1 \ell_1}\left[\frac{M\omega^2 \ell_1}{3d} + K\right](\alpha - \bar{u}) = A(\alpha - \bar{u}) \qquad \text{CON } A > 0$$

CERCANDO SOLUZIONI $\alpha - \bar{u} = \alpha_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 = A > 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{A}$

(MOTI IPERBOLICI)

3) SVILUPPO ATTORNO A $\bar{\alpha}$ (OPPURE ATTORNO A $-\bar{\alpha}$) CIOE' $S_3$ (O $S_4$)

SAPPIAMO CHE $0 < \cos\bar{\alpha} < 1$ ED $\ell_2 > \ell_1$ DA CUI

$$\underbrace{\frac{\cancel{\ell_1^2}}{3\cancel{\ell_1^2}\underbrace{\left[\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 - \cos^2\bar{\alpha}\right]}_{>0}}\left\{M_1 \ell_1^2 \underbrace{\left[\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 - \cos^2\bar{\alpha}\right]}_{>0} + M_2 \ell_2^2 \underbrace{(1 - \cos\bar{\alpha})}_{>0}\right\}}_{\alpha > 0}\ddot{\alpha}$$

$$\equiv \alpha\ddot{\alpha} = \cancel{Q_\alpha\Big|_{S_3,S_4}} + \underbrace{\frac{dQ_\alpha}{d\alpha}\Big|_{S_3,S_4}}_{\underbrace{\frac{M\omega^2\ell_1^2}{3}(\cos^2\alpha - 1)}_{<0}} (\alpha \mp \bar{\alpha})$$

$\Leftarrow$ DALLA ANALISI SULLA STABILITA (VEDI PAG. 3)

DA CUI:

$$\ddot{\alpha} = \underbrace{\frac{M\omega^2\ell_1^2}{3\alpha}(\cos^2\bar{\alpha} - 1)}_{\tilde{A} < 0}(\alpha \mp \bar{\alpha}) = \tilde{A}(\alpha \mp \bar{\alpha}) \quad \text{CON } \tilde{A} < 0$$

CERCANDO SOLUZIONI DEL TIPO $\alpha \mp \bar{\alpha} = \alpha_0 e^{\lambda t}$ AVREMO QUINDI

$$\lambda^2 = \tilde{A} < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{|\tilde{A}|} \Rightarrow \text{"MOTI ARMONICI"}$$

COME CI ASPETTAVAMO.

-o-

Università degli studi di Catania
Corso di laurea Triennale in Matematica
Prova scritta di Fisica Matematica
Appello del 25.02.2022

Un sistema materiale é costituito da due aste omogenee pesanti denominate rispettivamente $\overline{AB}$ di massa $M_1$ e lunghezza $L_1$ e $\overline{BC}$ di massa $M_2$ e lunghezza $L_2$ con $L_2 > L_1$, incernierate senza attrito in $B$. Il sistema, posto in un piano verticale $\Pi$, ha i punti $A$ e $C$ su una guida liscia orizzontale $r$ (asse delle $\vec{x}$ in figura), mentre il punto $B$ scorre senza attrito su una guida verticale $s$ (asse delle $\vec{y}$ in figura), con $O$ punto di intersezione tra $r$ ed $s$. Sul sistema oltre alla forza peso agisce la forza elastica

$$\{F = -k\,(B - D),\ B\} \qquad \text{con} \quad k > 0$$

essendo $D = (0, a)$ un punto di $s$ posto superiormente ad $r$ con $a > L_1$. Inoltre il piano verticale $\Pi$ ruota uniformemente, con velocitá angolare $\vec{\omega}$ attorno alla retta verticale $s$. Scegliendo come unica coordinata lagrangiana l'angolo $\vartheta$ tra la verticale $s$ e l'asta $\overline{AB}$ (come in figura) si chiede di determinare

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio del sistema.
2. Ponendo per semplicitá $M_1 + M_2 = M$, studiare la stabilità-instabilità delle configurazioni di equilibrio sistema, assumendo che valga la condizione
$$\frac{2\,k\,a - M\,g}{2\,L_1\,(k + M\,\omega^2/3)} \geq 1.$$
3. Scrivere l'equazione di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
4. Nelle condizioni del punto 2. studiare i moti in prima approssimazione attorno ad una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.