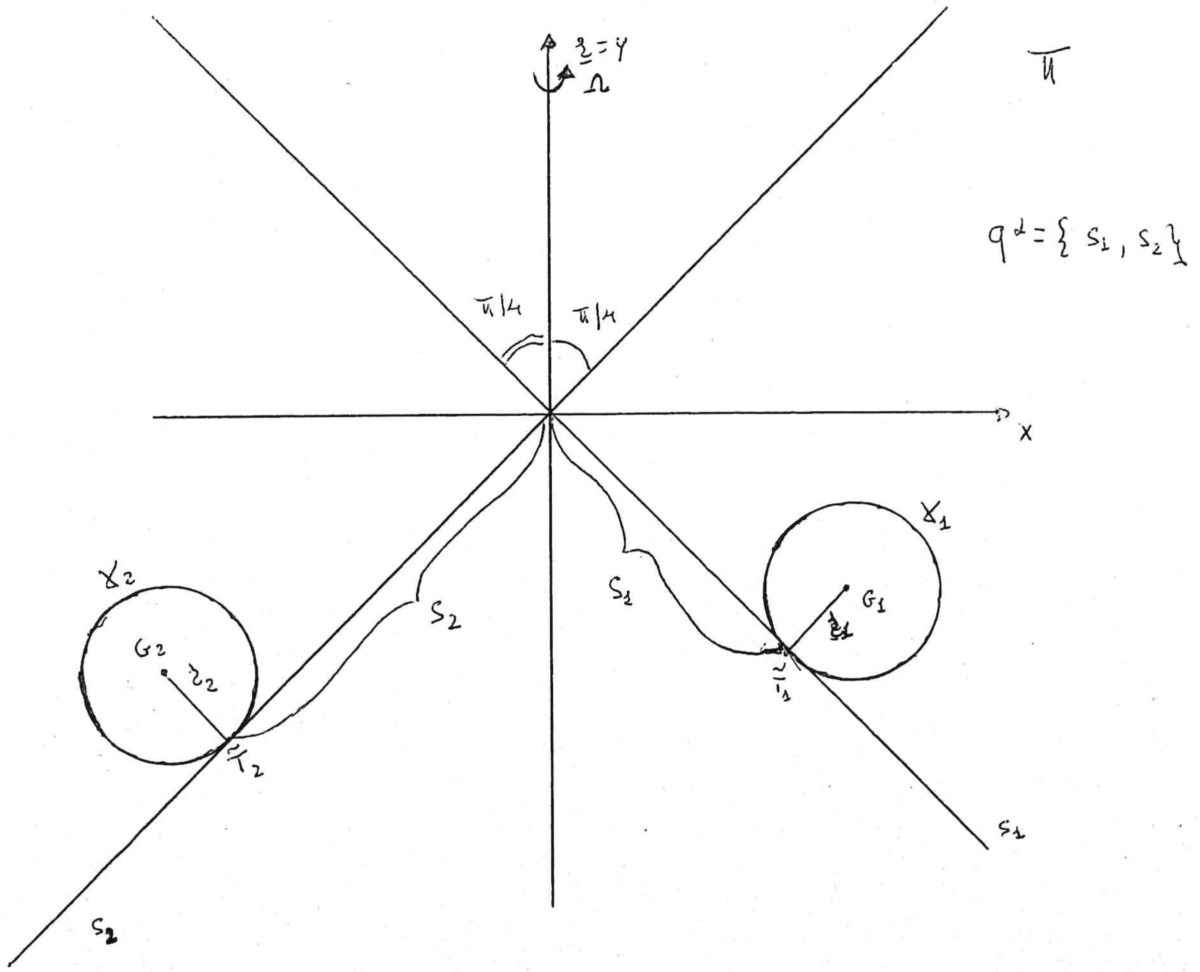
Università degli studi di Catania
Corso di laurea Triennale in Matematica
Prova in itinere per il corso di Fisica Matematica
Appello del 20.04.2016

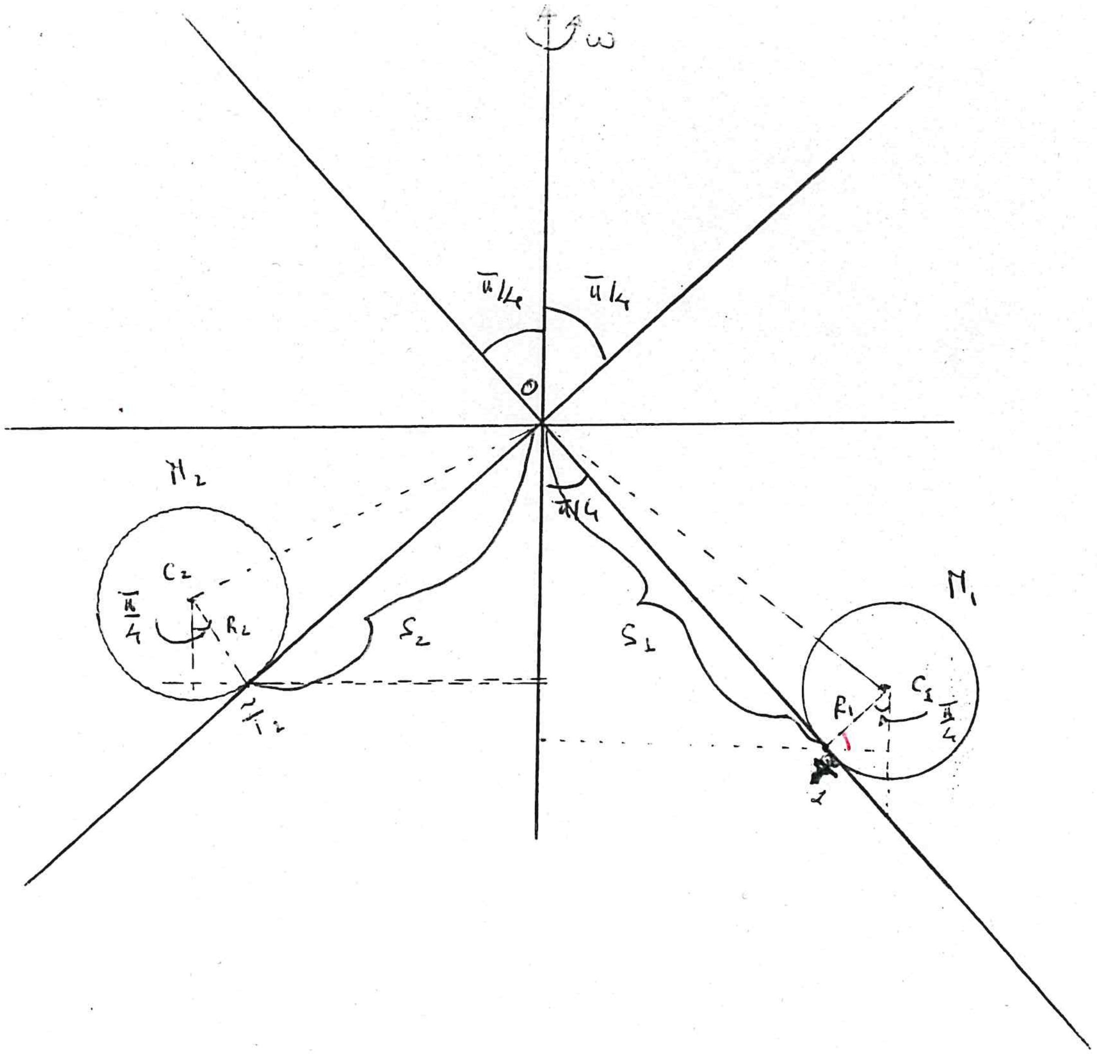
In un piano verticale Π sono poste due guide rettilinee ortogonali fisse $\mathbf{s}_1$ ed $\mathbf{s}_2$, formanti un angolo di $\pi/4$ con la verticale $\mathbf{r}$ passante per il punto comune o. Un sistema materiale S costituito da due dischi omogenei γ_1 e γ_2, aventi rispettivamente centri G_1 e G_2 raggi r_1 e r_2 con $r_1 < r_2$ ed uguale massa M, é vincolato senza attrito a stare su Π, inoltre γ_1 e γ_2 sono vincolati a rotolare senza strisciare rispettivamente su $\mathbf{s}_1$ ed $\mathbf{s}_2$.
Sapendo che sul sistema oltre alla forza peso agiscono le forze

$$\{F_1 = -k(G_1 - G_2),\ G_1\}, \quad \{F_2 = -k(G_2 - G_1),\ G_2\}$$

dove $k > 0$ e che il piano Π é posto in rotazione uniforme (con velocitá angolare Ω) attorno ad $\mathbf{r}$, si chiede di determinare al variare del parametro k:

1. le eventuali configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilitá.
2. scrivere le equazioni di moto, e gli eventuali integrali primi.
3. studiare il moto del sistema al variare di k;
4. determinare sotto quali condizioni sui parametri, e con quali condizioni iniziali, si possono avere moti in cui γ_1 sta in quiete.





$$C_{1x} = S_1 \sin(\pi/4) + R_1 \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 + R_1)$$

$$C_{1y} = -\left(S_1 \cos(\pi/4) - R_1 \cos(\pi/4)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-S_1 + R_1)$$

$$\Rightarrow C_1 \equiv \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 + R_1)\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 - R_1)\right\}$$

$$C_{2x} = -\left(S_2 \sin\pi/4 + R_2 \sin\pi/4\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(S_2 + R_2)$$

$$C_{2y} = -\left(S_2 \cos\pi/4 - R_2 \cos\pi/4\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(S_2 - R_2)$$

$$\Rightarrow C_2 = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}(S_2 + R_2)\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(S_2 - R_2)\right\}$$

s A ca $(C_1 - C_2)^2 = \frac{1}{2}\left\{(S_1 + S_2 + R_1 + R_2)^2 + (-S_1 + R_1 + S_2 - R_2)^2\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(S_1^2 + S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 + 2S_1S_2 + \cancel{2S_1R_1} + 2S_1R_2 + 2S_2R_1 + \cancel{2S_2R_2} + \cancel{2R_1R_2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(S_1^2 + S_2^2 + R_1^2 + R_2^2 - \cancel{2S_1R_1} - \cancel{2S_1S_2} + 2S_1R_2 + 2R_1S_2 - \cancel{2R_1R_2} - \cancel{2S_2R_2}\right)\right\}$$

$$= \left[(S_2 + R_1)^2 + (S_1 + R_2)^2\right]$$

$$U^{(P)}_{M_1} = -m(0,g)\cdot(C_1-0) = mg\frac{\sqrt{2}}{2}(S_1-R_1)$$

$$U^{(P)}_{M_2} = -m(0,g)\cdot(C_2-0) = mg\frac{\sqrt{2}}{2}(S_2-R_2)$$

$$U_F = -\frac{1}{2}K\left[(S_2+R_1)^2+(S_1+R_2)^2\right]$$

FORZE CENTRIFUGHE

$$U^{M_1} = \frac{1}{2}\omega^2\int|P-\bar{P}|^2dm = \frac{1}{2}I_Y^{M_1}\omega^2$$

$$U^{M_2} = \frac{1}{2}\omega^2\int|P-P|^2dm = \frac{1}{2}I_Y^{M_2}\omega^2$$

$$I_Y^{M_1} = I^{M_1}_{YC_1} + m(C_1-\bar{C}_1)^2 = \frac{1}{4}mR_1^2 + \frac{1}{2}m(S_1+R_1)^2$$

$$I_Y^{M_2} = I^{M_2}_{YC_2} + m(C_2-\bar{C}_2)^2 = \frac{1}{4}mR_2^2 + \frac{1}{2}m(S_2+R_2)^2$$

$$U^{M_1}+U^{M_2} = \frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{1}{4}mR_1^2+\frac{1}{4}mR_2^2+\frac{1}{2}m(S_1+R_1)^2+\frac{1}{2}m(S_2+R_2)^2\right]$$

DA CUI:

$$U_{TOT} = mg\frac{\sqrt{2}}{2}(S_1+S_2) - \frac{K}{2}\left[S_2^2+2S_2R_1+S_1^2+2S_1R_2\right]$$

$$+\frac{m}{4}\omega^2\left[S_1^2+2S_1R_1+S_2^2+2S_2R_2\right] + C.$$

$$\frac{\partial U}{\partial S_1} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{K}{\cancel{2}}(\cancel{2}S_1+\cancel{2}R_2) + \frac{1}{2\cancel{4}}m\omega^2(\cancel{2}S_1+\cancel{2}R_1)$$

$$= mg\frac{\sqrt{2}}{2} - KR_2 + \frac{1}{2}m\omega^2R_1 + \left(\frac{m\omega^2}{2}-K\right)S_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial S_2} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{K}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}S_2+\cancel{2}R_1\right] + \frac{m\omega^2}{4}\cdot\left[2S_2+2R_2\right]$$

$$= mg\frac{\sqrt{2}}{2} - KR_1 + \frac{1}{2}m\omega^2R_2 + \left(\frac{m\omega^2}{2}-K\right)S_2$$

$$Q_{s_1} = \frac{\partial U}{\partial s_1} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_1 + mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - K R_2 = 0$$

$$Q_{s_2} = \frac{\partial U}{\partial s_2} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_2 + mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - K R_1 = 0$$

) $m\omega^2 = 2K$ $\Rightarrow$ NESSUNA CONFIG. DI EQUILIBRIO IN QUANTO

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\partial U}{\partial s_2}\right|_{m\omega^2 = 2K} = mg\sqrt{2} \neq 0$$ DA CUI NON ARRIVO

MAI LA POSSIBILITÀ ~~CHE~~ SIA SODDISFATTA LA CONDIZIONE $\frac{\partial U}{\partial s_1} = 0$ $\frac{\partial U}{\partial s_2} = 0$

) $m\omega^2 \neq 2K$ $\Rightarrow$ $s_1 = \left[K R_2 - \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\right] / \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right)$

$\Rightarrow$ $s_2 = \left[K R_1 - \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\right] / \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right)$

) SE $m\omega^2 > 2K$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s_1^2} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) > 0$$

$$H = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right)^2 > 0 \quad \boxed{\text{INSTABILE}}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s_2^2} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) > 0$$

) $m\omega^2 < 2K$ $\quad \frac{\partial^2 U}{\partial s_1^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s_2} < 0$ $\quad H > 0$ $\boxed{\text{STABILE}}$

ENERGIA CINETICA:

$$T_{M_1} = \frac{1}{2} m \dot{C}_1^2 + T'_{M_1} \qquad \text{CON} \quad T'_{M_1} = \frac{1}{2} I_{M_1 z}^{(C_1)} \omega_{M_1}^2$$

DOVE $I_{M_1 z}^{(C_1)} = \frac{1}{2} m R_1^2$ $\qquad \dot{C}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\dot{s}_1, -\dot{s}_1\right] \Rightarrow \dot{C}_1^2 = \dot{s}_1^2$

$$\underline{V}_2(\hat{T}_1) = \underline{V}_2(C_1) + \omega_{M_1} \wedge (\hat{T}_1 - C_1) = 0 \Rightarrow |V_2(C_1)| = |\omega_{M_1} \wedge (\hat{T}_1 - C_1)| =$$

$$= \left|\omega_{M_1} R_1 \underbrace{(\underline{e}_3 \wedge \underline{e}_s)}_{\underline{e}_\alpha}\right| = \omega_{M_1} R_1 \equiv \dot{s}_1$$

$(\underline{\omega}_{M_1} = \omega_{M_1} \underline{e}_3, \quad \hat{T} - C = R_1 \underline{e}_s)$

$$\omega_{M_1} = \frac{\dot{s}_1}{R_1} \qquad T_{M_1} = \frac{1}{4} m \cancel{R_1^2} \left(\frac{\dot{s}_1}{\cancel{R_1}}\right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}_1^2 = \frac{3}{4} m \dot{s}_1^2$$

ANALOGAMENTE: $T_{M_2} = \frac{3}{4} m \dot{s}_2^2$ $\Rightarrow T_{TOT} = \frac{3}{4} m\left(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2\right)$

da cui le equazioni del moto:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{3}{2} m \dot{s}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{3}{2} m \ddot{s}_1 \qquad \frac{\partial T}{\partial s_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{3}{2} m \dot{s}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{3}{2} m \ddot{s}_2 \qquad \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0$$

quindi

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m \ddot{s}_1 = Q_{s_1} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_1 + mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - K R_2 \\ \frac{3}{2} m \ddot{s}_2 = Q_{s_2} = \left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_2 + mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - K R_1 \end{cases}$$

le equazioni sono disaccoppiate. quindi avremo come

integrali:

1) l'energia totale $E = T - U$

inoltre le due equazioni sono del tipo (disaccoppiate)

$$K \ddot{z} = F(z) \qquad \text{da cui l'integrale} \qquad \frac{1}{2} K \dot{z}^2 = \int_0^z F(\xi)\, d\xi + E$$

quindi dalla 1ª ~~...~~ e 2ª equazione avremo:

$$\frac{3}{4} m \dot{s}_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_1^2 + \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - K R_2\right) s_1 + E_1$$

$$\frac{3}{4} m \dot{s}_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_2^2 + \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - K R_1\right) s_2 + E_2$$

cioè i due integrali primi

$$E_1 = \frac{3}{4} m \dot{s}_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_1^2 - \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - K R_2\right) s_1$$

$$E_2 = \frac{3}{4} m \dot{s}_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{2} - K\right) s_2^2 - \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - K R_1\right) s_2$$

<u>NOTA</u>: è banale verificare che

$$E_1 + E_2 = E = T - U.$$

3) STUDIAMO LE EQUAZIONI DEL MOTO AL VARIARE DI K

AVREMO EQUAZIONI DEL TIPO

$$\ddot{s}_i = A s_i + B_i = A\left(s_i + \frac{B_i}{A}\right) \quad (\text{SE } A \neq 0)$$

1)

QUINDI SE $A \neq 0$ CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO

$$\left(s_i + \frac{B_i}{A}\right) = s_i^0 e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} A = \frac{2}{2} m^{-1}\left[\frac{m\omega^2}{2} - k\right] \\ B_1 = \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_1 - k R_2\right)\frac{2}{3} m^{-1} \\ B_2 = \left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 R_2 - k R_1\right)\frac{2}{3} m^{-1} \end{cases}$$

DA CUI SOSTITUENDO AVREMO:

$$\lambda^2 s_i^0 e^{\lambda t} = A\left(s_i^0 e^{\lambda t} - \cancel{\frac{B_i}{A}}\right) + \cancel{B_i} = s_i^0 e^{\lambda t}$$

QUINDI: $\lambda^2 = A$

1) SE $A > 0 \Rightarrow \left(\frac{m\omega^2}{2} - k\right) > 0 \Rightarrow m\omega^2 > 2k$

AVREMO $\lambda = \pm\sqrt{A} \Rightarrow$ MOTI ESPONENZIALI

2) SE $A < 0 \Rightarrow \left(\frac{m\omega^2}{2} - k\right) < 0 \Rightarrow m\omega^2 < 2k$

AVREMO $\lambda = \pm i\sqrt{|A|} \Rightarrow$ MOTI ARMONICI

3) SE $A = 0$ $\quad m\omega^2 = 2k$ AVREMO.

$$\ddot{s}_i = B_i$$

OSSERVIAMO CHE:

SE $B_1 = 0 \Rightarrow mg\frac{\sqrt{2}}{2} + k(R_1 - R_2) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{mg\frac{\sqrt{2}}{2}}{R_2 - R_1} > 0$ (LECITO PERCHÉ $R_2 > R_1$)

AVREMO $\begin{cases} \ddot{s}_1 = 0 \Rightarrow s_1 = \beta_1 t + \gamma_1 & \text{(MOTO UNIFORME PER } s_1) \\ \ddot{s}_2 = B_2 (\neq 0) \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2} B_2 t^2 + \beta_2 t + \gamma_2 & \text{(UNIFORMEMENTE ACCELERATO PER } s_2) \end{cases}$

$B_2 \neq 0$ (ALTRIMENTI SI AVREBBE $k = mg\sqrt{2}/2 / (R_1 - R_2) < 0$ ASSURDO)

SE $k \neq \dfrac{mg\sqrt{2}/2}{(R_2 - R_1)}$ $(B_1 \neq 0)$ AVREMO MOTI UNIFORMEMENTE ACCELERATI

d) PERCHÉ SI ABBIA s_1 = COSTANTE DALLA 1ª EQUAZIONE

$$Q_{s_1} = 0$$

QUINDI SI ACCADE:

A) $m\omega^2 \neq 2k \Rightarrow s_1(0) = \bar{s}_1$ ED $\dot{s}_1(0) = 0$ (*)

B) $m\omega^2 = 2k \Rightarrow \forall\, s_1(0)$ ED $\dot{s}_1(0) = 0$

DOVE OTTENIAMO $\cancel{m} g \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} \omega^2 (R_1 - R_2) = 0$

DA CUI $\omega^2 = \frac{g\sqrt{2}}{R_2 - R_1} > 0$ (UNICA ω ACCETTABILE)

(*) $\bar{s}_1$ È QUELLA TROVATA ALL'EQUILIBRIO