Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 01.03.2024

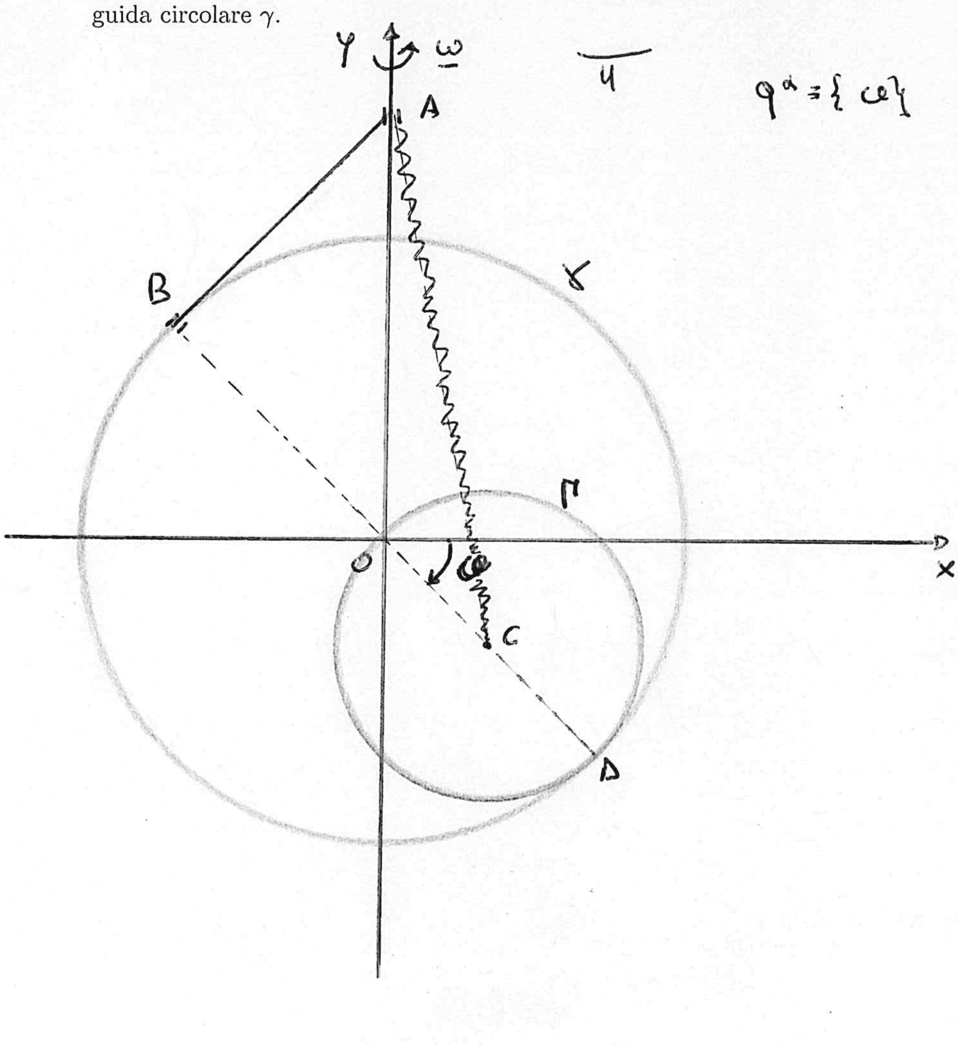
Sia dato un sistema materiale S costituito da un disco circolare rigido omogeneo Γ di centro C, raggio r, massa m e da un'asta rettilinea non omogenea di massa M, lunghezza R ed estremi A e B. Il disco Γ rotola senza strisciare sul bordo interno di una guida circolare γ di centro O e raggio R essendo tale guida fissata in un piano verticale Π. Dato quindi un riferimento fisso $\{O, x, y\}$ posto in Π, avremo che l'estremo A della barra é vincolato a scorrere lungo l'asse y, mentre l'altro estremo B dell'asta si muove sulla guida circolare γ in posizione diametralmente opposta al centro C del disco Γ (vedi figura). l'asta ha una densità, funzione della posizione di un suo generico punto P, descritta dalla relazione $\varrho(p) = \eta|P - A|$ con $\eta > 0$. Inoltre il piano Π é posto in rotazione uniforme attorno alla verticale y di Π con velocitá angolare ω ed oltre alla forza peso sul sistema agisce anche la forza elastica

$$F = -k\,(C - A), \qquad \text{con} \qquad k > 0,$$

Utilizzando come variabile lagrangiana l'angolo ϑ che OC forma con l'asse orizzontale positivo x, ed assumendo le relazioni

$$M = \frac{1}{2}m, \qquad r = \frac{1}{2}R \qquad k = \frac{1}{12}m\omega^2,$$

1. Determinare le eventuali configurazioni di equilibrio relativo e discuterne la stabilitá.
2. Scrivere l'equazione del moto, e gli eventuali integrali primi.
3. Studiare il moto in prima approssimazione attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui il disco Γ occupa la sua posizione piú alta sulla guida circolare γ.



$\overline{4}$

$q^\alpha = \{ \theta \}$

Università degli studi di Catania
Corso di laurea Triennale in Matematica
Prova scritta di Fisica Matematica (12 CFU)
Appello del 01.03.2024

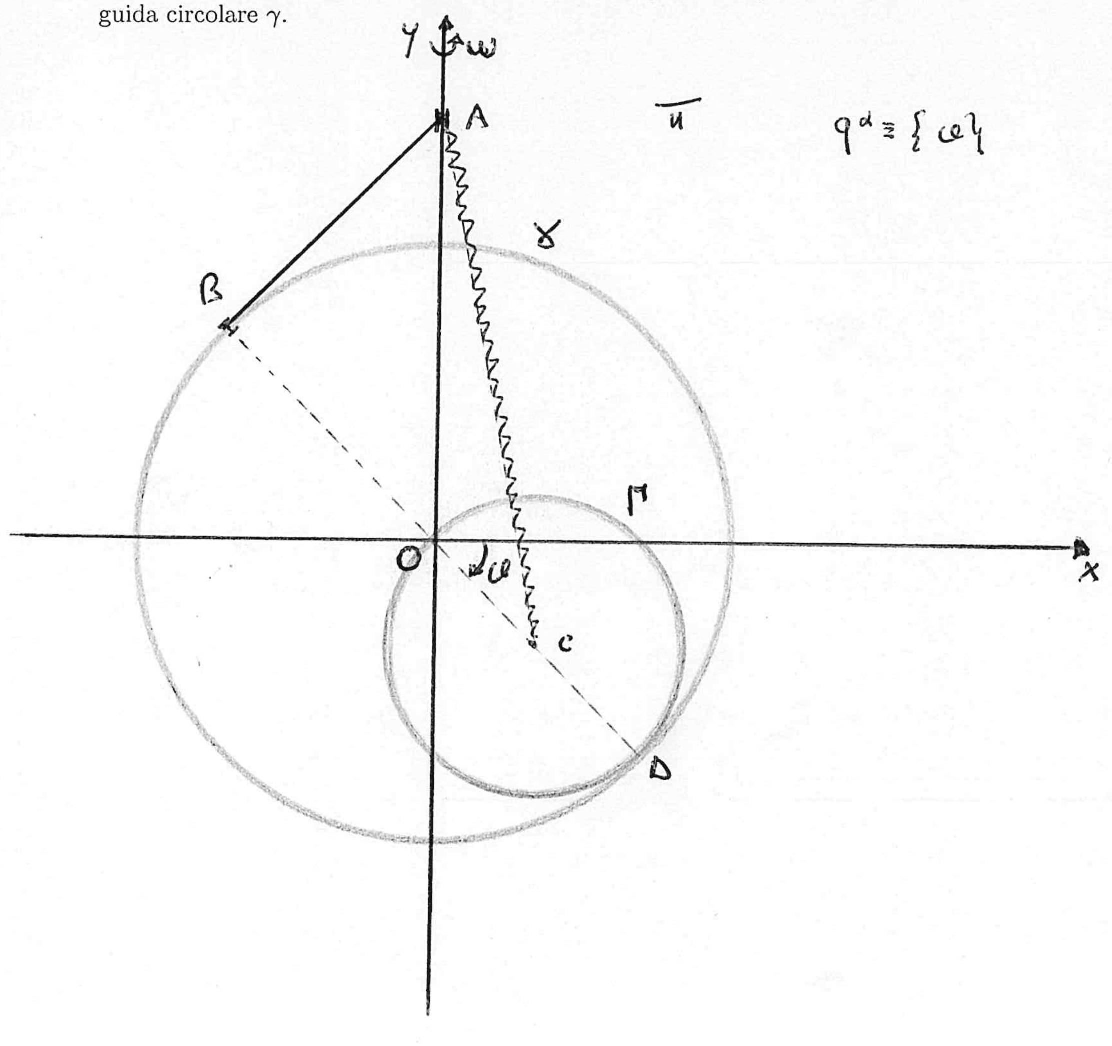
Sia dato un sistema materiale S costituito da un disco circolare rigido omogeneo Γ di centro C, raggio r, massa m e da un'asta rettilinea non omogenea di massa M, lunghezza R ed estremi A e B. Il disco Γ rotola senza strisciare sul bordo interno di una guida circolare γ di centro O e raggio R essendo tale guida fissata in un piano verticale Π. Dato quindi un riferimento fisso $\{O, x, y\}$ posto in Π, avremo che l'estremo A della barra é vincolato a scorrere lungo l'asse y, mentre l'altro estremo B dell'asta si muove sulla guida circolare γ in posizione diametralmente opposta al centro C del disco Γ (vedi figura). l'asta ha una densità, funzione della posizione di un suo generico punto P, descritta dalla relazione $\varrho(p) = \eta|P - A|$ con $\eta > 0$. Inoltre il piano Π é posto in rotazione uniforme attorno alla verticale y di Π con velocitá angolare ω ed oltre alla forza peso sul sistema agisce anche la forza elastica

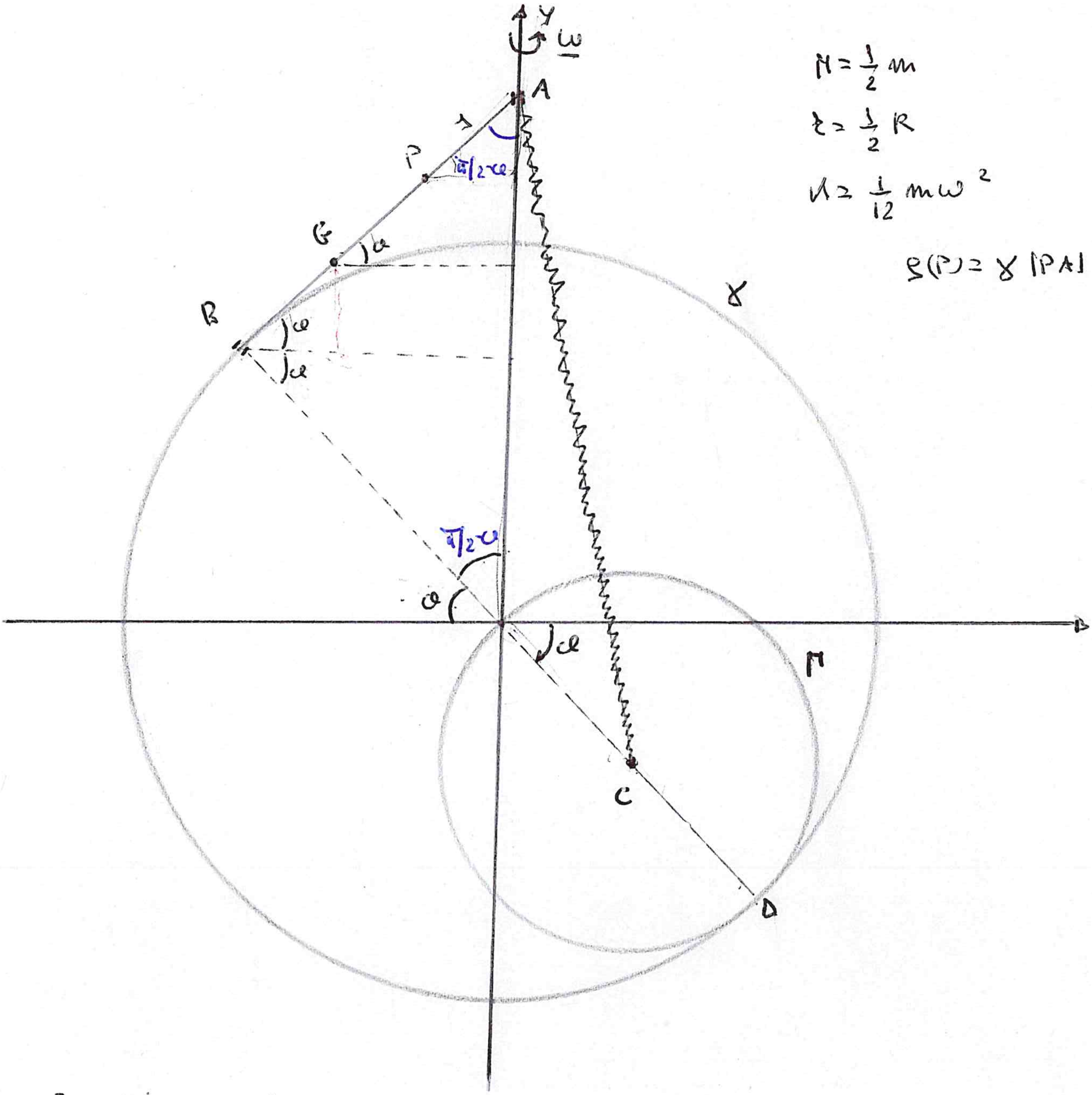
$$F = -k\,(C - A), \qquad \text{con} \qquad k > 0,$$

Utilizzando come variabile lagrangiana l'angolo ϑ che OC forma con l'asse orizzontale positivo x, ed assumendo le relazioni

$$M = \frac{1}{2}m, \qquad r = \frac{1}{2}R \qquad k = \frac{1}{12}m\omega^2,$$

1. Determinare le eventuali configurazioni di equilibrio relativo e discuterne la stabilitá.
2. Scrivere l'equazione del moto, e gli eventuali integrali primi.
3. Studiare il moto in prima approssimazione attorno alla evidente configurazione di equilibrio in cui il disco Γ occupa la sua posizione piú alta sulla guida circolare γ.





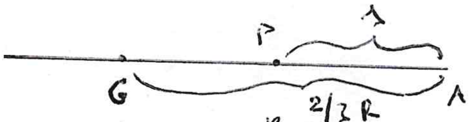
$M = \frac{1}{2} m$

$r = \frac{1}{2} R$

$k = \frac{1}{12} m \omega^2$

$\rho(P) = \gamma |PA| = \gamma s$

Determiniamo il baricentro di BA



$\rho(P) = \gamma |PA| = \gamma s$

$$G - A = \frac{1}{M} \int_0^R s \, dm = \frac{\gamma}{M} \int_0^R s^2 \, ds = \frac{\gamma}{M} \frac{R^3}{3} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{M} R^3$$

$$M = \int dm = \gamma \int_0^R s \, ds = \gamma \frac{R^2}{2} \Rightarrow \boxed{2M = \gamma R^2}$$

da cui $|G - A| = \frac{R}{3} \frac{1}{M} (\overbrace{\gamma R^2}^{2M}) = \frac{R}{3} \frac{1}{\cancel{M}} \cdot 2\cancel{M} = \frac{2}{3} R$

Quindi avremo le coordinate dei punti

$B = \{-R \cos\alpha, R \operatorname{sen}\alpha\}$ $\qquad A = \{0, 2R \operatorname{sen}\alpha\}$

$C \equiv \{(R - r)\cos\alpha, -(R - r)\operatorname{sen}\alpha\}$

$$G \equiv \left\{-\frac{2}{3}R\cos\alpha \,,\; 2R\sin\alpha - \frac{2}{3}R\sin\alpha\right\} = \left\{-\frac{2}{3}R\cos\alpha \,,\; \frac{4}{3}R\sin\alpha\right\}$$

METODO DEL POTENZIALE:

$$U^{(PESO)}_{AB} = Mg(0,-1)\cdot(G-O) = Mg(0,-1)\cdot\left\{-\frac{2}{3}R\cos\alpha \,,\; \frac{4}{3}R\sin\alpha\right\}$$

$$\boxed{U^{(PESO)}_{AB} = -\frac{4}{3}MgR\sin\alpha}$$

$$U^{(PESO)}_{M} = mg(0,-1)\cdot(C-O) = mg(0,-1)\cdot\{(R-r)\cos\alpha \,,\; -(R-r)\sin\alpha\}$$

$$\boxed{U^{(PESO)}_{M} = mg(R-r)\sin\alpha.}$$

$$A-C = \{-(R-r)\cos\alpha \,,\; [2R+(R-r)]\sin\alpha\}$$

$$(A-C)^2 = (R-r)^2 + [4R^2 + 4R(R-r)]\sin^2\alpha = 4R(2R-r)\sin^2\alpha + \text{cost.}$$

DA CUI LA FORZA ELASTICA AVRA' COME POTENZIALE

$$\boxed{U^{(ELAS)} = -\frac{1}{2}K(A-C)^2 = -2KR(2R-r)\sin^2\alpha}$$

CALCOLIAMO I POTENZIALI CENTRIFUGHI.

$$U^{(CENTR)}_{AB} = \frac{1}{2}\omega^2\int (P-\bar{P})^2\,dm \quad \forall P\in AB \Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 I^{AB}_{y,O}$$

$$P \equiv \{-s\cos\alpha \,,\; 2R\sin\alpha - s\sin\alpha\}$$

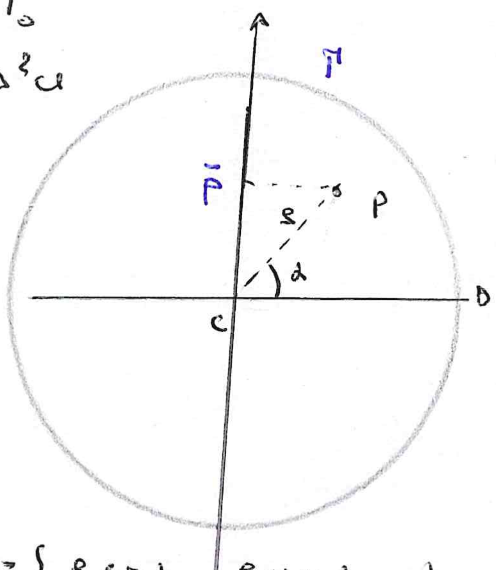
$$I^{AB}_{y,O} = \int s^2\cos^2\alpha\,(\gamma s)\,ds = \gamma\cos^2\alpha\int_0^R s^3\,ds = \gamma\frac{R^4}{4}\cos^2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}R^2(\underbrace{\gamma R^2}_{2M})\cos^2\alpha = \frac{1}{2}MR^2\cos^3\alpha$$

DA CUI $\boxed{U^{(CENTR)}_{AB} = \frac{1}{4}MR^2\omega^2\cos^3\alpha}$

$$U^{(CENTR)}_{M} = \frac{1}{2}\omega^2\int(P-\bar{P})^2\,dm = \frac{1}{2}\omega^2 I^{M}_{y,O}$$

$$I^{M}_{y,O} = I^{M}_{y,C} + m(G-\bar{G})^2$$



$$P = \{\rho\cos\alpha \,,\; \rho\sin\alpha \,,\; 0\}$$

$$I^{M}_{Y,C} = \iint (\rho\cos\alpha)^2\, dm = \frac{m}{\pi r^2} \iint \rho^2 \cos^2\alpha\, \rho\, d\rho\, d\alpha =$$

$$= \frac{m}{\pi r^2} \underbrace{\int_0^r \rho^3\, d\rho}_{\frac{r^4}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha}_{\pi} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad = \frac{m}{\cancel{\pi} r^2}\frac{r^4}{4}\cancel{\pi} = \frac{1}{4} m r^2$$

QUINDI

$$I^{M}_{Y,O} = \frac{1}{4} m r^2 + m (R-r)^2 \cos^2\varphi.$$

QUINDI

$$\boxed{U^{CONTR}_{M} = \frac{1}{2} m \omega^2 (R-r)^2 \cos^2\varphi + \text{Kost.}}$$

DA CUI IL POTENZIALE TOTALE:

$$U_{TOT} = -\frac{4}{3} M g R \,\text{sen}\varphi + mg(R-r)\,\text{sen}\varphi - 2KR(2R-r)\,\text{sen}^2\varphi$$
$$+ \frac{1}{4} M\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{2} m\omega^2 (R-r)^2 \cos^2\varphi.$$

PONIAMO QUINDI $r = \frac{1}{2} R \Rightarrow (R-r) = \frac{1}{2} R$; $(2R-r) = \frac{3}{2} R$

$M = \frac{1}{2} m$

$$U_{TOT} = -\frac{2}{3} mgR\,\text{sen}\varphi + \frac{1}{2} mgR\,\text{sen}\varphi$$
$$- 3KR^2\,\text{sen}^2\varphi + \frac{1}{8} m\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{8} m\omega^2 R^2 \cos^2\varphi$$
$$= -\frac{1}{6} mgR\,\text{sen}\varphi - 3KR^2\,\text{sen}^2\varphi + \frac{1}{4} m\omega^2 R^2 \cos^2\varphi$$

PONIAMO INFINE $K = \frac{1}{12} m\omega^2$ E SCRIVIAMO $\text{sen}^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$$\boxed{U_{TOT} = -\frac{1}{6} mgR\,\text{sen}\varphi + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2\varphi + \text{Kost}}$$

DA QUI LA SOLLECITAZIONE:

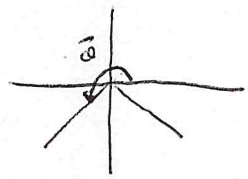
$$Q_\alpha = \frac{dU}{d\alpha} = -\frac{1}{6} m g R \cos\alpha - m\omega^2 R^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\boxed{Q_\alpha = -mR\cos\alpha \left\{ \frac{g}{6} + \omega^2 R \sin\alpha \right\}}$$

EQUILIBRIO

$$Q_\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \pi/2$$

$$-1 \le \sin\alpha = -\frac{g}{6\omega^2 R} < 1$$



$\frac{g}{6\omega^2 R} \le 1$ (il segno di uguale si scarta poiché $\sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -\pi/2$, caso precedente)

AVREMO QUINDI

SE $\frac{g}{6\omega^2 R} \ge 1$ $\{S_1 = \pi/2, \quad S_2 = -\pi/2\}$ "DUE CONFIGURAZIONI"

SE $\frac{g}{6\omega^2 R} < 1$ $\{S_1 = \pi/2, \; S_2 = -\pi/2, \; S_3 = \bar{\alpha}, \; S_4 = \pi - \bar{\alpha}\}$

con $\bar{\alpha} = \text{arcsen}\left\{-\frac{g}{6\omega^2 R}\right\}$ "QUATTRO CONFIGURAZ."

"STABILITA'"

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = +\frac{1}{6} m g R \sin\alpha - m\omega^2 R^2 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

1) SIA $S_1 = \{\alpha = \pi/2\}$

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi/2} = \frac{1}{6} m g R + m\omega^2 R > 0$$ NO MAX $\Rightarrow$ INSTABILE

2) $$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=-\pi/2} = -\frac{1}{6} m g R + m\omega^2 R^2 = mR\left[-\frac{g}{6} + \omega^2 R\right]$$

SE $\boxed{-\frac{g}{6} + \omega^2 R < 0}$ $\left(\Rightarrow \frac{g}{6\omega^2 R} > 1\right)$ MAX $\Rightarrow$ STABILE

SE $\boxed{-\frac{g}{6} + \omega^2 R > 0}$ $\left(\Rightarrow \frac{g}{6\omega^2 R} < 1\right)$ NO MAX $\Rightarrow$ INSTABILE

SE $\quad -\frac{g}{6}+\omega^2 R=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{6\omega^2 R}=1 \qquad \left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=-\pi/2}=0$

DA CUI PROCEDIAMO CON IL METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

$$\frac{d^3U}{d\alpha^2}=\frac{1}{6}mgR\cos\alpha+4m\omega^2R^2\sin\alpha\cos\alpha\Big|_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}=0$$

$$\frac{d^4U}{d\alpha^2}=-\frac{1}{6}mgR\sin\alpha+4m\omega^2R^2\left[\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right]\Big|_{\alpha=-\pi/2}=$$

$$=+\frac{1}{6}mgR-4m\omega^2R^2=mR\left[\frac{g}{6}-4\omega^2R\right]_{g=6\omega^2R}=$$

$$=-3m\omega^2R^2<0 \Rightarrow \boxed{\text{MAX} \Rightarrow \text{STABILE}}$$

QUINDI: NEL CASO $\boxed{\alpha=-\pi/2}$ AVREMO CHE

$$\begin{cases} \dfrac{g}{6\omega^2R}\geq 1 & \text{MASSIMO} \Rightarrow \text{STABILITÀ} \\[2ex] \dfrac{g}{6\omega^2R}<1 & \text{NO MAX} \Rightarrow \text{INSTABILITÀ} \end{cases}$$

INFINE PER $\alpha=\bar{\alpha}$ E $\alpha=\pi-\bar{\alpha} \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{g}{6\omega^2R}$

DA CUI

$\boxed{\text{NOTA: OPPURE } \left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\substack{\alpha=\bar\alpha\\ \alpha=\pi-\bar\alpha}}=\left\{\frac{1}{6}mgR+m\omega^2R^2\cancel{\sin\alpha}\right\}\sin\alpha=-m\omega^2R^2\cos^2\alpha<0}$

$$\left.\frac{d^2U}{d\alpha^2}\right|_{\substack{\alpha=\bar\alpha\\ \alpha=\pi-\bar\alpha}}=\frac{1}{6}mgR\sin\alpha-m\omega^2R^2\left[1-2\sin^2\alpha\right]\Big|_{\substack{\alpha=\bar\alpha\\ \alpha=\pi-\bar\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{6}mgR\cdot\left(-\frac{g}{6\omega^2R}\right)+2m\omega^2R^2\cdot\frac{g^2}{(6\omega^2R)^2}-m\omega^2R^2$$

$$=-\frac{mg^2}{36\omega^2}+\frac{1}{3}mR\left(\cancel{6\omega^2R}\right)\frac{g}{(6\omega^2R)}-m\omega^2R^2$$

$$=\frac{mg^2}{36\omega^2}-m\omega^2R^2=m\omega^2R^2\left[\underbrace{\left(\frac{g}{6\omega^2R}\right)^2}_{\sin^2\bar\alpha}-1\right]=-m\omega^2R^2\cos^2\bar\alpha<0$$

AVENDO VALORE LA CONDIZIONE

$$\frac{g}{6\omega^2 R} < 1 \quad \text{AVREMO} \quad \left.\frac{d^2 U}{d\alpha^2}\right|_{\substack{\alpha=\bar{\alpha} \\ \alpha=\pi-\bar{\alpha}}} = m\omega^2 R^2\left[\left(\frac{g}{6\omega^2 R}\right)^2 - 1\right] < 0$$

DA CUI MAX $\Rightarrow$ STABILITÀ PER $\alpha=\bar{\alpha}$ ed $\alpha=\pi-\bar{\alpha}$.

ENERGIA CINETICA:

$$T = T_{AB} + T_M$$

APPLICANDO KONIG.

$$T_{AB} = \frac{1}{2} M \dot{G}^2 + T'_{AB} \qquad T'_{AB} = \frac{1}{2} I^{AB}_{G,z}\,\dot{\alpha}^2$$

OSSERVIAMO CHE LA DENSITÀ $\rho(s)$ SI CALCOLA A PARTIRE DALL'ESTREMO A DELL'ASTA QUINDI DOVREMO PRIMA CALCOLARE IL MOMENTO DI INERZIA

$$I^{AB}_{A,z} = \int_0^R s^2 \gamma s\, ds = \gamma\frac{R^4}{4} = \frac{R^2}{4}(\overbrace{\gamma R^2}^{2M}) = \frac{1}{2}MR^2$$

NOTA: OPPURE CALCOLO DIRETTAMENTE $I^{AB}_{G,z} = \int_0^R \left(\frac{2}{3}R - s\right)^2 \gamma s\, ds = \frac{4}{9}R^2 M + \gamma\int_0^R s^3 ds - \frac{4}{3}R\gamma\int_0^R s^2 ds = \frac{4}{9}MR^2 + \frac{M}{2}R^2 - \frac{8}{9}MR^2 = \frac{1}{18}MR^2$

DOPO APPLICHIAMO IL TEOREMA DI HUYGENS

$$I^{AB}_{z,A} = I^{AB}_{z,G} + M(\overline{GA})^2 \Rightarrow I^{AB}_{z,G} = I^{AB}_{z,A} - M(\overline{GA})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 - M\left(\frac{2}{3}R\right)^2 = MR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{18}MR^2$$

QUINDI $I^{AB}_{z,G} = \frac{1}{18}MR^2$

OSSERVO CHE $\dot{G} = \left\{\frac{2}{3}R\sin\alpha\,\dot{\alpha},\ \frac{4}{3}R\cos\alpha\,\dot{\alpha}\right\}$

DA CUI $\dot{G}^2 = \frac{4}{9}R^2\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha}\dot{\alpha}^2 + \frac{16}{9}R^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 =$

$$= \frac{4}{9}R^2\dot{\alpha}^2 + \left(\frac{16}{9} - \frac{4}{9}\right)R^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 = \frac{4}{9}R^2\dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3}R^2\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2$$

QUINDI $T_{AB} = \frac{1}{2}M\cdot\left\{\frac{4}{9}\dot{\alpha}^2 + \frac{4}{3}\cos^2\alpha\,\dot{\alpha}^2\right\}R^2 + \frac{1}{36}MR^2\dot{\alpha}^2$

(7)

$$T_{AB} = \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{36}\right) MR^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{3} MR^2 \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 =$$

$$\boxed{T_{AB} = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{3} MR^2 \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2}$$

LO STESSO RISULTATO SI OTTERRA' CON IL METODO PUNTUALE

$$T_{AD} = \frac{1}{2} \int \dot{p}^2\, dm \qquad \text{con } P \equiv \{-s\cos\alpha\,,\ (2R-s)\,\mathrm{sen}\,\alpha\}$$

DA CUI $\dot{p} = \{s\,\mathrm{sen}\,\alpha\, \dot{\alpha}\,,\ (2R-s)\cos\alpha\, \dot{\alpha}\}$

$$\dot{p}^2 = s^2 \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 + (2R-s)^2 \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2$$

QUINDI: $T_{AD} = \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \int_0^R s^2\, dm + \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \int_0^R (4R^2 + s^2 - 4Rs)\, dm \right.$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2\, \gamma \int_0^R s^3\, ds + \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \left[4R^2 \overbrace{\int_0^R dm}^{M} + \int_0^R s^2\, dm \right.\right.$$

$$\left.\left. - 4R \int_0^R s\, dm \right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2\, \gamma \cdot \frac{R^4}{4} + \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \left[4MR^2 + \gamma \int_0^R s^3\, ds \right.\right.$$

$$\left.\left. - 4R\gamma \int_0^R s^2\, ds \right]\right\} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{4} R^2 \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 (\underbrace{\gamma R^2}_{2M}) + \right.$$

$$\left. + \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \left[4MR^2 + \gamma \frac{R^4}{4} - 4R\gamma \frac{R^3}{3} \right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{2} MR^2 \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 + \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 \left[4MR^2 + \frac{1}{2} MR^2 - \frac{8}{3} MR^2 \right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4} MR^2 \mathrm{sen}^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2 MR^2 \left[\overbrace{4 + \frac{1}{2} - \frac{8}{3}}^{11/6} \right]$$

$$= \frac{1}{4} MR^2 \underbrace{\mathrm{sen}^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{11}{12} MR^2 \cos^2\alpha\, \dot{\alpha}^2$$

$$T = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\alpha}^2 + \Big(\underbrace{\frac{11}{12} - \frac{1}{4}}_{2/3}\Big) MR^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2\alpha$$

DA CUI LO STESSO RISULTATO OTTENUTO CON KONIG.

$$\boxed{T_{AB} = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3} MR^2 \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2}$$

SE CALCOLIAMO $T_M = \frac{1}{2} m \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I^M_{z,c}\, \Omega^2$

$$\dot{C} = \{-(R-r)\, \text{sen}\varphi\, \dot{\varphi},\ -(R-r)\cos\varphi\, \dot{\varphi}\}$$

$$\dot{C}^2 = (R-r)^2 \dot{\varphi}^2$$

$$I^M_{zc} = \sigma \iint \rho^2\, \rho\, d\rho\, d\alpha = \frac{m}{\pi r^2} \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{m}{\cancel{\pi} r^2} \frac{r^4}{4} 2\cancel{\pi} = \frac{1}{2} m r^2$$

PER IL CALCOLO DI Ω RICORDIAMO CHE NEL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

$$V_A = 0 = V_C + \Omega \wedge (A-C) \qquad |V_C|^2 = \Omega^2 r^2$$

DA CUI $\Omega^2 = \dfrac{(R-r)^2 \dot{\varphi}^2}{r^2}$

QUINDI $T_M = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m \cancel{r^2}\right) \cdot \frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}} \dot{\varphi}^2$

$$T_M = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2$$

RICORDANDO CHE $M = \frac{1}{2} m$ $\quad r = \frac{1}{2} R$ AVREMO QUINDI

$$T_{TOT} = \frac{1}{8} mR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} mR^2 \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{16} mR^2 \dot{\varphi}^2$$

DA CUI.

$$\boxed{T_{TOT} = \frac{5}{16} mR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} mR^2 \cos^2\varphi\, \dot{\varphi}^2}$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{5}{8} m R^2 \dot\theta + \frac{2}{3} m R^2 \cos^2\alpha\, \dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{5}{8} m R^2 \ddot\theta + \frac{2}{3} m R^2 \cos^2\alpha\, \ddot\theta - \frac{4}{3} m R^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \dot\theta^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{4}{3} m R^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \dot\theta^2$$

DA CUI:

$$\boxed{\frac{5}{8} m R^2 \ddot\theta + \frac{2}{3} m R^2 \cos^2\alpha\, \ddot\theta - \frac{2}{3} m R^2 \sin\alpha\cos\alpha\, \dot\theta^2 = - m R \cos\alpha \left\{ \frac{g}{6} + \omega^2 R \sin\alpha \right\}}$$

INTEGRALE PRIMO L'ENERGIA $E = T - U$.

LINEARIZZIAMO ATTORNO LA SEGUENTE CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO IN CUI M SI TROVA NELLA POSIZIONE PIÙ **ALTA** SU γ CIOÈ $S_2 \equiv \{\alpha = -\pi/2\}$

$$\frac{5}{8} m R^2 \ddot\theta = m R \left[\omega^2 R - \frac{g}{6} \right] (\alpha + \pi/2)$$

CERCANDO SOLUZIONI $\alpha + \pi/2 = \alpha_0 e^{\lambda t}$

$$\frac{5}{8} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \lambda^2 = \cancel{m}\cancel{R} \left[\omega^2 R - \frac{g}{6} \right]$$

DA CUI $\lambda^2 = \frac{8}{5R}\left[\omega^2 R - \frac{g}{6} \right] = A$

PER $\omega^2 R - \frac{g}{6} < 0$ $A < 0$ $\lambda = \pm i\sqrt{|A|}$ MOTI ARMONICI

PER $\omega^2 R - \frac{g}{6} > 0$ $A > 0$ $\lambda = \pm\sqrt{A}$ MOTI IPERBOLICI

PER $\omega^2 R - \frac{g}{6} = 0$ MOTI UNIFORMI, LA LINEARIZZAZIONE NON È SIGNIFICATIVA FISICAMENTE.