

Compito del 6/6/1994

1. Dato il sistema lineare

$$Ax = b$$

con $A = M - N$, $\det M \neq 0$, si consideri un generico metodo iterativo della forma

$$Mx^{n+1} = Nx^n + b \quad (1)$$

(a) Dimostrare che gli autovalori della matrice di iterazione corrispondente allo schema (1) sono le radici della equazione

$$\det(\lambda M - N) = 0$$

(b) Sia

$$A_\mu = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 2\mu - 1 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 2\mu - 1 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Sfruttando il risultato precedente, dire per quali valori del parametro μ il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

2. Sia $f \in C^3([0, 1])$ una funzione di cui si conoscono i seguenti valori:

x_i	$f(x_i)$
0.0	1.2
0.5	0.6
1.0	1.0

e sia $f'''(x) > 0$, $x \in [0, 1]$.

È possibile assicurare che $f(0.4) > 0.6$?

3. Sia $f(x) = x \exp(-x)$. Dare una stima per eccesso ed una per difetto di

$$\int_0^1 f(x) dx$$

utilizzando le formule composite dei trapezi e del punto di mezzo con un errore assoluto minore di 0.05.