Compito del 2/2/1994

1. Calcolare la soluzione del seguente sistema lineare con il metodo di Gauss *naive*, e determinare le matrici L ed U della fattorizzazione $A = LU$, dove A è la matrice dei coefficienti del sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

2. Applicare il metodo di Newton alla funzione $f(x) = x^2 - 2$ per determinare una approssimazione della soluzione $\alpha = \sqrt{2} \approx 1.4142136$: partendo da $x_0 = 1$, determinare il numero n di iterazioni necessarie affinché $|x_n - \alpha| < 10^{-3}$.

3. Applicare la formula di Simpson globale per approssimare il seguente integrale

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

   Stimare l'errore utilizzando la formula del resto, e confrontare la stima ottenuta con l'errore vero.

4. Si dimostri che le sole matrici di $\mathbb{R}^{n\times n}$ che commutano con ogni matrice dei $\mathbb{R}^{n\times n}$ sono le matrici scalari, ossia del tipo $A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   [Suggerimento: Si deve trovare una matrice A tale che sia $AB = BA \quad \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si scelga B in modo opportuno e si dimostri che $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$, e $a_{ii} = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario]