Compito del 27/4/1998

[1] Dimostrare che per i polinomi di Lagrange $l_i(x)$ si ha

$$\forall\, x \in R, \quad \sum_{1=0}^{n} l_i(x)(x_i - x)^j = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0, \\ 0, & \text{se } j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

[2] Interpolare la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[-1, 1]$ sugli zeri del polinomio di Chebicev di grado 3. Stimare l'errore massimo di interpolazione. Sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione. Utilizzare tale polinomio per calcolare una approssimazione dell'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Confrontare il risultato ottenuto col risultato esatto. Calcolare nodi e pesi della formula di quadratura basata sull'approssimazione della f mediante il polinomio p. Di quale formula si tratta e quale è il suo ordine polinomiale?

[3] Data la funzione

$$f(x) = a(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x})(x - \bar{x}_2) - (x - \bar{x}_1) - (x - \bar{x}_2),$$

dove $a > 0$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, e $\bar{x}$ arbitrario. Dimostrare che esiste sempre un'unica soluzione reale α della equazione $f(x) = 0$ compresa fra $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, e che la successione di Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

con

$$x_0 = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}}{3},$$

converge alla soluzione α. [Suggerimento: mostrare che le ipotesi di convergenza del metodo di Newton sono soddisfatte in uno dei due intervalli: $[\bar{x}_1, x_0]$ oppure $[x_0, \bar{x}_2]$.]