

Compito del 19/9/1994

[1] Sia $f \in C^\infty[0, 1]$ e tale che

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{2}{3^k}, \quad x \in [0, 1].$$

Dare una stima dell'errore che si commetterebbe interpolando la funzione f nell'intervallo $[0.15, 0.18]$ sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.7$, $x_3 = 1$.

[2] Sia $a \in R$ parametro reale e sia M la matrice definita da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{2}) & -\frac{1}{2}(a^2 - a + \frac{1}{2}) & 0 \\ -\frac{1}{2}(a^2 - a + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro a la matrice è convergente.

[3] Localizzare una radice della funzione

$$F(x) = e^{-x} - \ln(x)$$

e darne una approssimazione con almeno due cifre significative.

[4] Mostrare che i due seguenti algoritmi sono entrambe validi per il calcolo della quantità $(x_2^2 - x_3^2) - 2x_1(x_2 + x_3)$. Dire quale dei due ha regione di stabilità più ampia, supponendo che i dati x_1, x_2, x_3 non siano affetti da errore e verifichino le seguenti relazioni: $x_1 > x_2 > 0$, $x_3 > x_2 > 0$.

Algoritmo A

Calcola $x_1 - x_2$, $x_1 + x_3$,

Calcola $(x_1 - x_2)^2$, $(x_1 + x_3)^2$

Calcola $(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2$

Algoritmo B

Calcola $2x_1$, $-(x_2 + x_3)$, $x_3 - x_2$,

Calcola $2x_1 + (x_3 - x_2)$,

Calcola $-(x_2 + x_3)(2x_1 + (x_3 - x_2))$.