

Compito del 17/10/1994

- [1] Sia $f \in C^\infty[0, 1]$ e siano $x_0, x_1, x_2 \in [0, 1]$. Si dica sotto quali ipotesi sui nodi x_0, x_1, x_2 esiste ed è unico il polinomio P che verifica le seguenti condizioni di interpolazione:

$$P(x_0) = f(x_0)$$

$$P'(x_1) = f'(x_1)$$

$$P'(x_2) = f'(x_2)$$

- [2] Sia $k \in R$ parametro reale e siano M_1 e M_2 le matrici definite da

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & 0 \\ k-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & 0 \\ k-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri il metodo iterativo di Gauss-Jacobi per risolvere i sistemi $M_1x = b$ e $M_2x = b$, $x \in R^3$, $b \in R^3$. Dire per quali valori del parametro k entrambe i metodi convergono alla soluzione. Per quali di questi valori il metodo di Jacobi relativo al sistema $M_1x = b$ converge più rapidamente di quello applicato al sistema $M_2x = b$?

- [3] Dimostrare che il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(e^{2-2x_n} - 1)$$

converge in un opportuno intorno della soluzione, e stabilire l'ordine di convergenza.

Facoltativo (Da fare solo dopo aver svolto tutti gli esercizi)

(a) Dimostrare che il procedimento converge $\forall x_0 > 1$

(b) Dimostrare che il procedimento converge $\forall x_0 \in R$

- [4] Sia $f \in C[0, 1]$ e $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Si consideri la seguente formula di quadratura sui nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 3/4$

$$I_2(f) = w_0f(x_0) + w_1f(x_1)$$

Si determinino i pesi w_0, w_1 in modo che la formula sia di tipo interpolatorio.