

Compito del 15/2/1995

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 96 & 24 & 24 \\ 24 & 86 & 46 \\ 24 & 46 & 90 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare la fattorizzazione LU della matrice A . [7 punti]
(b) Utilizzare la decomposizione LU per risolvere il sistema $LUx = b$, dove $b = (-72, 102, -22)^T$, risolvendo in successione i due sistemi: [6 punti]

$$Ly = b, \quad Ux = y$$

- (c) Localizzare gli autovalori di A nel piano complesso. [5 punti]

Facoltativo (da risolvere dopo aver svolto gli altri esercizi): Utilizzando il risultato precedente sulla localizzazione degli autovalori, fornire una stima del numero di condizionamento di A .

2. Si consideri la formula iterativa $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, con

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right), \quad \alpha > 0$$

Mostrare che la successione x_n converge in un intorno di $\sqrt{\alpha}$ e stabilirne l'ordine di convergenza. [4 punti]

3. Determinare l'ordine polinomiale della formula di quadratura $I_n(f) = \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$ relativa all'integrale $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$, essendo [8 punti]

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$w_0 = \frac{5}{9}, \quad w_1 = \frac{8}{9}, \quad w_2 = \frac{5}{9}$$