

## Compito del 13/6/1995

1. Si consideri il sistema lineare

$$Ax = b$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0.004 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si risolva il sistema mediante il metodo di Gauss-naive e mediante il metodo di Gauss con pivot, utilizzando aritmetica di macchina con due cifre con arrotondamento [ad esempio il numero 376 viene arrotondato a 380, il numero 0.000473 a 0.00047, e così via].

Si confrontino le soluzioni numeriche ottenute con la soluzione esatta del sistema e si commenti il risultato.

[12 punti]

2. Si dimostri che per ogni terna di reali  $(y_1, y_2, y_3)$  esiste ed è unico il polinomio  $p \in \Pi_2$  tale che  $p(0) = y_1$ ,  $p(1) = y_2$ ,  $\int_0^1 p(x) dx = y_3$ .

[5 punti]

3. Sia data l'applicazione

$$\Phi(x) = -x^2 + 4x - 4 + 4(1 + x^2)^{-1}.$$

Mostrare che 1 è punto unito di  $\Phi$ . Dire se 1 è un punto attrattivo, ed in caso affermativo calcolare l'ordine di convergenza del metodo iterativo  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ .

[5 punti]

4. Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^1 te^{-t} dt.$$

Siano  $T_1$  l'approssimazione dell'integrale ottenuta mediante la formula dei trapezi semplice,  $T_2$  l'approssimazione di  $I$  ottenuta mediante la formula dei trapezi composta con due intervalli ed  $S$  il risultato dell'applicazione della formula di Simpson semplice.

- (a) Determinare  $T_1$ ,  $T_2$  ed applicare il metodo di estrapolazione di Romberg per ottenere una valutazione più accurata dell'integrale.
- (b) Calcolare  $S$  e confrontare il risultato con quanto ottenuto precedentemente e con il valore esatto di  $I$ .

[8 punti]