

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

1.0 Introduzione

Una equazione differenziale è un'equazione in cui sono presenti derivate e la cui soluzione è una funzione. Se le variabili indipendenti sono più di una, le derivate sono di tipo parziale.

Derivate ordinarie: $q = q(t)$

$$\frac{dq}{dt} = q' ; \quad \frac{d^{(k)}q}{dt^k} = q^{(k)}$$

Derivate parziali: $q = q(x, t)$

$$\partial_t^{(k)} q = q_{t \dots t} = \frac{\partial^k q}{\partial t^k} ; \quad \frac{\partial^{(k)} q}{\partial x} = q_{x \dots x} = \frac{\partial^k q}{\partial x^k}$$

equazioni differenziali ordinarie (ODE):

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} + \alpha q = 0$$

equazioni differenziali parziali (PDE):

$$u_{xx} = 0 \quad \underline{\text{Laplace}}$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \underline{\text{Calore}}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \underline{\text{Onde}}$$

$$u_t + a u_x = 0 \quad \underline{\text{Avvezione}}$$

2.0 Problemi ben posti

Un problema si dice ben posto quando:

- ha soluzione;
- la soluzione è unica;
- la soluzione dipende in modo continuo dai dati.

Ci occuperemo di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico.

Un sistema di m equazioni è detto *sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico* in un punto (x, t) , $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, $U \in \mathbb{R}^m$:

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

se nel punto (x, t) lo jacobiano ha m autovalori reali:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

ed un insieme di autovettori linearmente indipendenti:

$$R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(m)}$$

Il sistema si dirà *strettamente iperbolico* se i λ_i sono distinti:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$$

3.0 Equazione di avvezione

Se il sistema precedente si riduce ad una sola equazione:

$$u_t + a u_x = 0 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

allora lo jacobiano sarà dato da a , per cui anche l'autovalore sarà a . Tale equazione è la più semplice equazione differenziale alle derivate parziali iperbolica ed è nota come *equazione di avvezione*. E' lineare se a è una costante, nota come velocità caratteristica o velocità di propagazione dell'onda.

Curve caratteristiche

Consideriamo, nel piano $x-t$, le curve $x = x(t)$ con $u = u(x(t), t)$. La variazione di u lungo tale curva è data da:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

Se la curva soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow x = x_0 + at$$

allora:

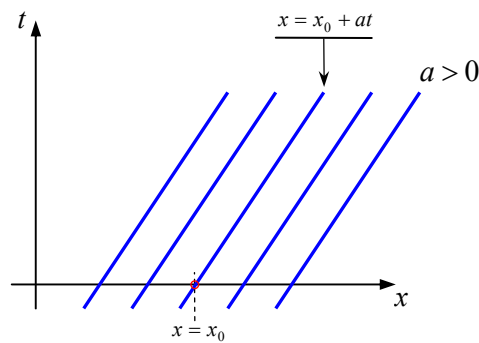
$$\frac{du}{dt} = 0, \text{ cioè } u \text{ è costante lungo } x = x_0 + at$$

Le curve caratteristiche $x = x_0 + at$ sono curve lungo le quali l'equazione differenziale alle derivate parziali $u_t + au_x = 0$ si trasforma nella ODE:

$$\frac{du}{dt} = 0$$

4.0 Rappresentazione geometrica delle curve caratteristiche

Quanto detto nel paragrafo precedente può essere espresso dal seguente grafico:



Le rette $x = x_0 + at$ hanno pendenza $\frac{1}{-a}$ dal momento che il piano è $x-t$ e non $t-x$. x_0 è il punto della condizione iniziale, cioè il problema da risolvere è:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

La soluzione che passa per il punto x_0 è data da:

$$u(x,t) = u_0(x_0) = u_0(x - at)$$

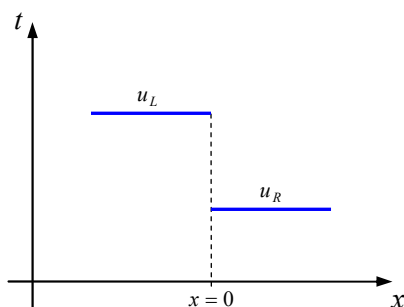
La condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ rimane costante lungo la caratteristica, pertanto dato un profilo $u_0(x)$, l'equazione differenziale alle derivate parziali trasla il profilo verso destra se $a > 0$ e verso sinistra se $a < 0$. Per *onda* intendiamo un disturbo che viaggia con velocità finita.

5.0 Problema di Riemann

Tale problema consiste nel risolvere un caso speciale di condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{se } x < 0 \\ u_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

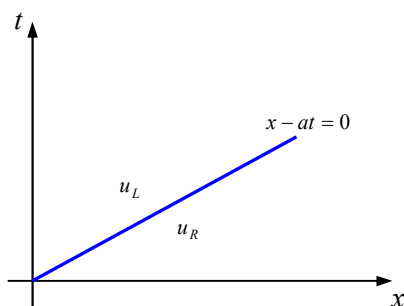
Graficamente:



Poiché la soluzione dell'equazione di avvezione è $u(x,t) = u_0(x-at)$, allora otteniamo:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{se } x-at < 0 \\ u_R & \text{se } x-at > 0 \end{cases}$$

Questo significa che la linea $x-at$ è l'unica attraverso la quale la soluzione cambia da un valore all'altro, cioè:



Quella appena descritta è una proprietà delle equazioni differenziali alle derivate parziali iperboliche lineari:

le singolarità si propagano solo lungo le curve caratteristiche.

6.0 Non linearità e formazione di shocks

Una equazione differenziale alle derivate parziali non lineare ha la seguente forma generica:

$$u_t + f(u)_x = 0$$

che possiamo scrivere:

$$u_t + \lambda(u)u_x = 0$$

dove:

$$\lambda(u) = \frac{df}{du} = f'(u)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Se } \lambda(u) = a & \Rightarrow \text{Equazione di avvezione} & f(u) = au \\ \text{Se } \lambda(u) = u & \Rightarrow \text{Equazione di Burgers} & f(u) = \frac{1}{2}u^2 \end{array}$$

E' importante analizzare la monotonia di $\lambda(u)$. Si possono avere tre casi:

$$\lambda'(u) = \frac{d\lambda(u)}{du} = f''(u) = \begin{cases} > 0 & \text{flusso convesso} \\ < 0 & \text{flusso concavo} \\ = 0 & \text{non concavo, non convesso} \end{cases}$$

Nel caso di flusso concavo si ha l'*equazione del traffico*, nel caso di flusso convesso si ha l'*equazione di Burgers*, infine nel caso di flusso non concavo e non convesso si ha l'*equazione di Buckley-Leverett*. In ogni caso le caratteristiche sono ancora delle rette, ma di equazione:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Poiché l'inclinazione dipende dalla soluzione stessa, tali curve non sono più parallele:

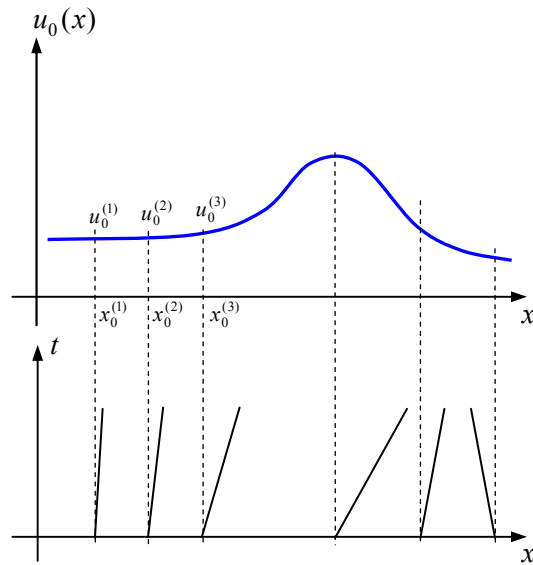
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x_0) \\ x &= x_0 + \lambda(u_0(x_0))t \\ u(x, t) &= u_0(x - \lambda(u_0(x_0))t) \end{aligned}$$

La soluzione è quindi ora implicita e va ricavata iterativamente. Il comportamento della soluzione è diverso se il dato iniziale, cioè la $u_0(x)$, è una funzione regolare o no.

I caso) Dato iniziale regolare "wave steepening"

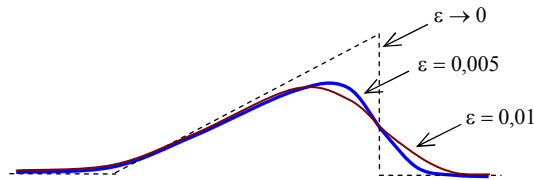
Esaminiamo solo il caso convesso, cioè $f''(u) = \lambda'(u) > 0$, dal momento che l'altro è analogo ma con segno opposto. Se $\lambda'(u) > 0$ allora i valori più grandi di $u_0(x)$ viaggiano più velocemente dei valori più piccoli. Quindi se $u_0(x)$ è crescente in $[x_L, x_R]$, i valori più grandi di u_0 si propagheranno più velocemente e si avrà una regione espansiva. Se $u_0(x)$ è decrescente in $[x_L, x_R]$, i valori più grandi viaggeranno ancora più velocemente rispetto ai valori minori, ma questa volta si troveranno sul lato sinistro, dando luogo ad una regione compressiva.



Se il tempo è sufficientemente piccolo, la soluzione è quella classica. Per tempi maggiori di quello critico, dato dal punto in cui due caratteristiche si incontrano, la soluzione non è più unica. Dal momento che fisicamente la soluzione deve essere unica, tale soluzione è data dalla risoluzione del problema viscoso:

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx}$$

e si studia tale equazione al tendere di ε a 0.



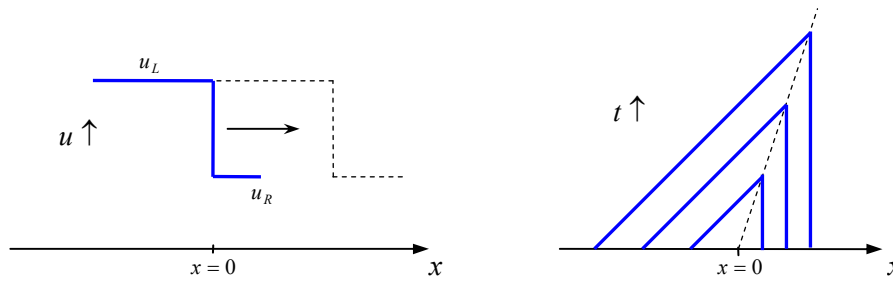
Il caso) Dati iniziali non regolari: problema di Riemann

Consideriamo:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{se } x < 0 \\ u_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

La soluzione dipende dalla relazione tra u_L ed u_R .

- i) $u_L > u_R$. Poiché $\lambda'(u) = f''(u) > 0$, le velocità sulla sinistra sono maggiori di quelle a destra. I dati sono quindi compressivi:



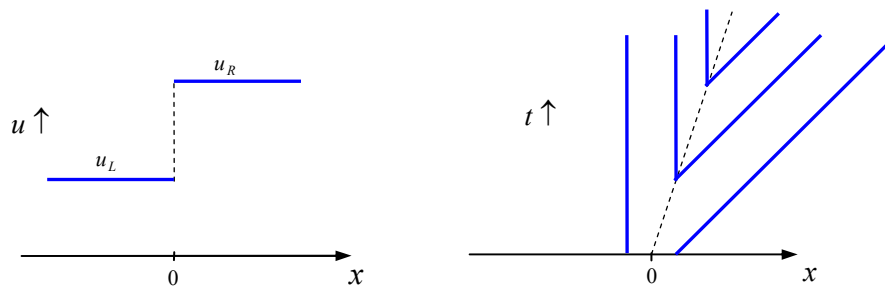
Si può far vedere che la soluzione è unica ed è data da:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{se } x < St \\ u_R & \text{se } x > St \end{cases}$$

dove S è la velocità della discontinuità data da:

$$S = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$$

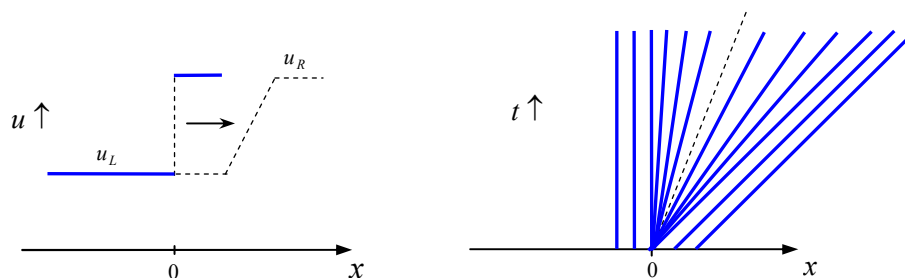
ii) $u_L < u_R$ in questo caso si può verificare che esistono infinite soluzioni di cui una è quella precedente:



ed un'altra è data da:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{se } x < u_L t \\ \frac{x}{t} & \text{se } u_L t < x < u_R t \\ u_R & \text{se } x > u_R t \end{cases}$$

la quale è nota come onda di rarefazione e si può provare che essa è l'unica fisicamente accettabile.



7.0 Differenze finite

Sostituiamo il problema continuo, dato dall'equazione differenziale alle derivate parziali, con un problema discreto rappresentando la PDE con un insieme di valori discreti. Tale operazione viene compiuta in due passi:

- i) Discretizzare il dominio dell'equazione differenziale alle derivate parziali mediante un insieme di punti che determinano una griglia.
- ii) Discretizzare l'equazione differenziale alle derivate parziali sulla griglia, ottenendo valori discreti. Questi sono i valori puntuali della PDE sulla griglia.

Per implementare questi due passi, occorre approssimare le derivate. Se $f(x)$ è sufficientemente regolare, usando il teorema di Taylor si ha:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + O(\Delta x^3) \quad (1)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + O(\Delta x^3) \quad (2)$$

da cui ricaviamo:

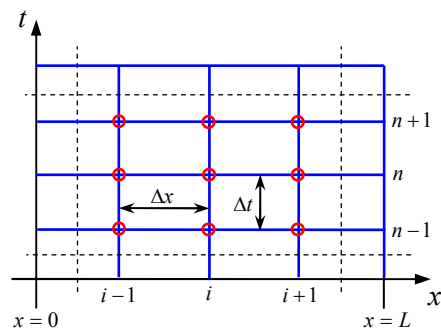
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{forward})$$

$$f'(x_0) = -\frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{backward})$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ha un'approssimazione di ordine 2 della derivata prima:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Le approssimazioni forward e backward del primo ordine sono dette differenze finite laterali (one-sided), mentre quella del secondo ordine è detta centrale. Una griglia regolare di passo $\Delta x \times \Delta t$ è data da:



I generici punti mesh (griglia) siano $(i\Delta x, n\Delta t)$ dove:

$$\Delta x = \frac{L}{M-1}$$

se $(0, L)$ è la lunghezza del dominio spaziale e:

$$x_i = i\Delta x \quad \text{con: } i = 0, \dots, M, \quad t^n = n\Delta t, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots$$

I valori discretizzati della soluzione $u(x, t)$ nel punto $(i\Delta x, n\Delta t)$ sono:

$$u_i^n \equiv u(i\Delta x, n\Delta t) \equiv u(x_i, t^n)$$

Approssimiamo adesso la derivata in t con una differenza finita in avanti del primo ordine:

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

e la derivata in x con una differenza finita centrale (del secondo ordine):

$$u_x = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Quindi, discretizzando la $u_t + a u_x = 0$ si ha:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3)$$

Data la condizione iniziale $u_0(x)$, che va anch'essa discretizzata dando così i valori iniziali

u_i^0 , $i = 0, \dots, M$, si risolve per u_i^{n+1} al tempo $t + \Delta t \quad \forall i$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} c (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

avendo posto:

$$c = \frac{\Delta t a}{\Delta x} = \frac{a}{\Delta x / \Delta t} \equiv CFL$$

che è il numero di Courant noto come CFL o numero di Courant-Friedrichs-Levy. Esso è il rapporto tra la velocità di propagazione del segnale a e la velocità della griglia. Lo schema dato dalla (3) è però instabile.

Per verificare che lo schema (3) è inutile in quanto instabile, eseguiamo un'analisi di Von

Neumann. Tale analisi si applica solo ai problemi lineari. Consideriamo una soluzione del tipo:

$$u_i^n = A^n e^{I i \vartheta}$$

dove I è l'unità complessa $I = \sqrt{-1}$, A è l'ampiezza e ϑ è l'angolo di fase. $\vartheta = P \Delta x$, dove $P: \lambda = \frac{2\pi}{P}$ è la lunghezza d'onda. Sostituendo questa soluzione nella nostra equazione

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} c (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

si ha:

$$A^{n+1} e^{I i \vartheta} = A^n e^{I i \vartheta} - \frac{1}{2} c A^n [e^{I(i+1)\vartheta} - e^{I(i-1)\vartheta}]$$

$$\cancel{A^n} \cancel{A} e^{I i \vartheta} = \cancel{A^n} \cancel{e^{I i \vartheta}} - \frac{1}{2} \cancel{c} \cancel{A^n} \cancel{2I} e^{I i \vartheta} \left[\frac{e^{I \vartheta} - e^{-I \vartheta}}{2I} \right] \Rightarrow A = 1 - I c \sin \vartheta$$

Perché ci sia stabilità si deve avere:

$$\|A\| < 1$$

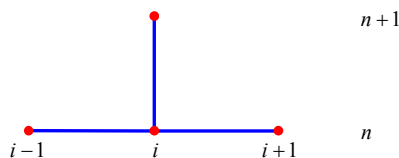
ma:

$$\|A\| = 1 + c^2 \sin^2 \vartheta \geq 1$$

e quindi lo schema è incondizionatamente instabile.

Per individuare un metodo guardiamo i punti griglia usati nel calcolo, ottenendo un diagramma

che è noto come lo *stencil* del metodo. Il metodo precedente ha il seguente stencil:



8.0 Schemi Upwind

Per rimediare all'instabilità dello schema dato dalla (3), sostituiamo la derivata u_x con una approssimazione laterale. Si hanno due possibili scelte:

$$u_x = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{oppure} \quad u_x = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

di cui una sola porta ad uno schema utile. La scelta dipenderà dal segno della velocità di propagazione a dell'onda dell'equazione differenziale alle derivate parziali.

Sia $a > 0$, allora lo schema:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (4)$$

dà uno schema condizionatamente stabile. Infatti, dall'analisi di Von Neumann si ha:

$$\|A\|^2 = (1-c)^2 + 2c(1-c)\cos\vartheta + c^2$$

da cui si ha la condizione di stabilità:

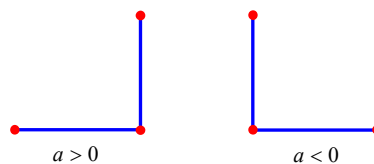
$$0 \leq c \leq 1$$

Poiché $c = \frac{a}{\Delta x / \Delta t}$ dove a è un dato e Δx è scelto in base all'accuratezza, si ha un vincolo su Δt .

Pertanto:

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$$

Il metodo (4) si chiama *Upwind del primo ordine* o schema CIR (Courant, Isaacson & Rees) e il suo stencil dipende da a .



9.0 Schema di Lax-Wendroff

Esistono due modi per ricavare tale metodo:

i) Discretizziamo l'equazione:

$$u_t + a u_x = 0 \quad (5)$$

usando le differenze in avanti per t ed una media delle approssimazioni upwind e downwind:

$$u_x = \beta_1 \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \beta_2 \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$$

dove:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(1+c) \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{1}{2}(1-c)$$

da cui:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}c(1+c)u_{i-1}^n + (1-c^2)u_i^n + \frac{1}{2}c(1-c)u_{i+1}^n \quad (6)$$

Sebbene le approssimazioni usate sono del primo ordine, vedremo che lo schema è accurato al secondo ordine in x e t .

ii) Espandiamo in serie di Taylor la soluzione della (5) attorno al punto $(x, t+k)$:

$$u(x, t+k) = u(x, t) + k u_t(x, t) + \frac{1}{2}k^2 u_{tt}(x, t) + \dots$$

Poiché $u_t = -Au_x$ si ha:

$$u_{tt} = -Au_{xt} = -Au_{tx} = -A(-Au_x)_x = A^2 u_{xx}$$

da cui:

$$u(x, t+k) = u(x, t) - k Au_x(x, t) + \frac{1}{2}k^2 A^2 u_{xx}(x, t) + \dots$$

Usando le differenze centrali per u_x ed u_{xx} si ha la (6).

10.0 Schema di Lax-Friedrichs

Questo è un altro schema che evita l'instabilità dello schema dato dalla (3), ma la derivata spaziale è discretizzata con le differenze centrali e non laterali. Per ricavare gli schemi precedenti, abbiamo discretizzato u_t con:

$$u_t = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Al posto di u_i^n mettiamo $\frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n)$ che è un valore medio al livello n . Si ha:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - \frac{1}{2}c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

o anche:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(1+c)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(1-c)u_{i+1}^n$$

L'analisi di stabilità dà $|A^2| = \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta$. Da cui:

$$|c| \leq 1$$

L'analisi dell'errore di troncamento ci indica che lo schema è del primo ordine.

11.0 Errore di troncamento del metodo di Lax-Friedrichs

Riscriviamo il metodo in una forma diversa:

$$\frac{1}{\Delta t} \left[u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \right] + \frac{1}{2\Delta x} a (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0$$

Sostituendo ad u_i^n la soluzione esatta nel punto (x_i, t_n) non si ha zero, ma l'errore locale di troncamento:

$$E_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left[u(x, t + \Delta t) - \frac{1}{2}u(x - \Delta x, t) + u(x + \Delta x, t) \right] + \frac{1}{2\Delta x} a [u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)]$$

In tale calcolo stiamo supponendo che le soluzioni siano regolari e quindi possiamo espandere ogni termine in serie di Taylor. Ponendo $u \equiv u(x, t)$ si ha:

$$\begin{aligned} E_{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left[(u + \Delta t \cdot u_t + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} + \dots) - (u + \frac{1}{2} h^2 u_{xx} + \dots) \right] + \frac{1}{2\Delta x} a \left[2h u_x + \frac{1}{3} h^3 u_{xxx} + \dots \right] = \\ &= u_t + a u_x + \frac{1}{2} (\Delta t u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx}) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

essendo $h = \Delta x$. Poiché u è soluzione di $u_t + a u_x = 0$ e usando l'uguaglianza $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ si ha:

$$E_{\Delta t} = \frac{1}{2} \Delta t \left(a^2 - \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} \right) u_{xx}(x, t) + O(\Delta t^2) = O(\Delta t) \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

N.B. $\Delta x/\Delta t$ è costante, così come $(\Delta x)^2/(\Delta t)^2$, per cui il metodo di Lax-Friedrichs è del primo ordine.

12.0 Problema lineare, soluzioni discontinue

Consideriamo un metodo numerico applicato al problema di Riemann per l'equazione di avvezione:

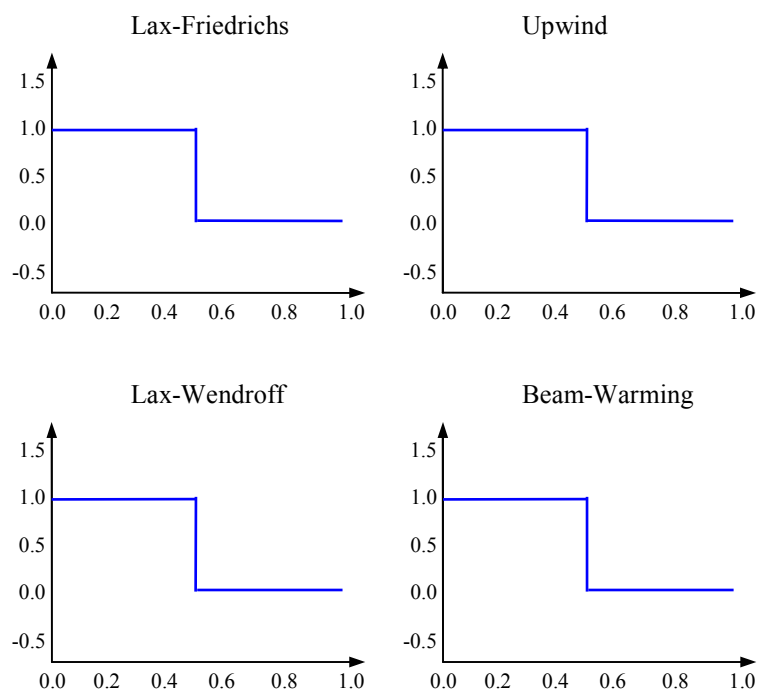
$$u_t + au_x = 0 \quad x \in \mathbf{R}, t > 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La soluzione esatta è $u_0(x-at)$ ma si hanno difficoltà vicino la discontinuità poiché approssimando u_x con le differenze finite si ha:

$$\frac{u(at + \Delta x, t) - u(at - h, t)}{2\Delta x} = \frac{0-1}{2\Delta x} \rightarrow -\infty \text{ per } \Delta x \rightarrow 0$$

Sebbene si possa dimostrare la convergenza di un metodo stabile e consistente, l'ordine del metodo, calcolato per soluzioni regolari, può essere di molto inferiore a quello previsto.



Notiamo che i metodi del primo ordine danno soluzioni smussate, mentre quelli del secondo ordine danno soluzioni oscillanti. Vediamo di analizzarne le ragioni.

13.0 Tecnica delle equazioni modificate

Una tecnica utile per studiare il comportamento delle soluzioni delle equazioni alle differenze, è di modellarle con una equazione differenziale alle derivate parziali. Il tutto per verificare che esistono altre equazioni differenziali alle derivate parziali diverse da quella in cui ha origine l'equazione alle differenze che quest'ultima riesce a risolvere più accuratamente. La derivazione dell'equazione modificata è strettamente correlata con il calcolo dell'errore di troncamento per un dato metodo.

Consideriamo il metodo di Lax-Friedrichs per il quale abbiamo visto che l'errore di troncamento locale è dato da:

$$E_x = \frac{1}{2}k \left(a^2 - \frac{h^2}{k^2} \right) u_{xx}(x,t) + O(k^2) \quad \text{con } h = \Delta x, k = \Delta t$$

Questo risultato è ricavato supponendo che $u(x,t)$ sia la soluzione di:

$$u_t + au_x = 0$$

Se invece essa fosse soluzione di:

$$u_t + au_x + \frac{1}{2} \left(k u_{tt} - \frac{h^2}{k} u_{xxx} \right) = 0 \quad (7)$$

l'errore per tale equazione sarebbe $O(\Delta k^2)$, cioè il metodo di Lax-Friedrichs è del secondo ordine per la (7). La (7) è l'equazione modificata per il metodo di Lax-Friedrichs. Manipolandola si ottiene:

$$u_{tt} = -a u_{xt} - \frac{1}{2} \left(k u_{ttt} - \frac{h^2}{k} u_{xxx} \right) = -a(-a u_{xx} + O(k)) + O(k) = a^2 u_{xx} + O(k)$$

Ponendo $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ nella (7), si ha $O(k^2)$ e quindi il metodo ha accuratezza del secondo ordine pure per l'equazione modificata:

$$u_t + au_x = \frac{h^2}{2k} \left(1 - \frac{k^2}{h^2} a^2 \right) u_{xx}$$

Un'equazione del tipo:

$$u_t + au_x = D u_{xx} \quad (8)$$

è detta equazione di avvezione-diffusione, poiché la soluzione della (8) diventa piatta (smussa gli angoli nelle sue discontinuità) con il tempo solo se $D > 0$ e questo dà la condizione di stabilità già vista. Questo spiega perché il metodo di Lax-Friedrichs si comporta come mostrato precedentemente.

Si può verificare che l'equazione modificata per l'*upwind* è data da:

$$u_t + au_x = \frac{1}{2} h a \left(1 - \frac{k}{h} \right) u_{xx}$$

che ha la forma del tipo rappresentato dalla (8). Notiamo che il coefficiente di diffusione del metodo di Lax-Friedrichs è più grande dell'upwind e quindi quest'ultimo è meno diffusivo.

Invece con il metodo di Lax-Wendroff, che è del secondo ordine, per $u_t + au_x = 0$ si ha un'approssimazione del terzo ordine per l'equazione:

$$u_t + au_x = \frac{h^2}{6} a \left(\frac{k^2}{h^2} a^2 - 1 \right) u_{xxx}$$

Un'equazione del tipo $u_t + au_x = \mu u_{xxx}$ è detta *equazione dispersiva* e spiega il comportamento oscillatorio nelle vicinanze delle regioni discontinue.

14.0 Proprietà degli schemi alle differenze finite

Una forma generale dei metodi alle differenze finite è data da:

$$u_i^{n+i} = \sum_{k=-k_L}^{k_R} b_k u_{i+k}^n$$

(schemi espliciti) dove k_L e k_R sono due interi non negativi. Assumiamo che tali schemi siano lineari, cioè tutti i coefficienti b_k siano costanti. Ogni schema alle differenze finite è caratterizzato dai b_k . Le proprietà degli schemi sono il supporto, il bias, la consistenza, la stabilità, la convergenza e l'accuratezza.

Il *supporto* è il numero di punti griglia usati nella somma $k_L + k_R + 1$. Il *bias* del supporto è la direzione dello schema. Si parla di *schemi upwind* se dipendono dalla direzione delle caratteristiche, di *schemi centrali* altrimenti.

15.0 Errore globale e convergenza

L'errore globale è definito dalla differenza tra la soluzione vera e quella calcolata:

$$E_j^n = u_j^n - u(x_j, t_n)$$

Possiamo definire una funzione costante a tratti, a partire dai valori u_j^n . Indichiamo questa funzione con $U_{\Delta t}(x, t)$ che assume il valore u_j^n nella cella (j, n) . Possiamo quindi definire la funzione errore:

$$\varepsilon_{\Delta t}(x, t) = U_{\Delta t}(x, t) - u(x, t)$$

dove quindi E_j^n è il valore di $\varepsilon_{\Delta t}(x, t)$ nella cella (j, n) . Con tali definizioni diciamo che il metodo è convergente in qualche norma se:

$$\|\varepsilon_{\Delta t}(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

con $t \geq 0$ fissato.

16.0 Accuratezza ed errore locale di troncamento

L'errore di troncamento è una misura di quanto bene l'equazione alle differenze modella localmente l'equazione differenziale alle derivate parziali. Si definisce sostituendo la soluzione approssimata u_j^n con la soluzione vera $u(x_j, t_n)$ nell'equazione alle differenze. A sua volta la soluzione vera è una soluzione approssimata dell'equazione alle differenze. Definiamo l'errore di troncamento locale con l'espressione:

$$E_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [u(x, t + \Delta t) - D(u(x, t))]$$

dove D è l'operatore alle differenze.

Diremo che un metodo è *consistente* se:

$$\|E_{\Delta t}\| \rightarrow 0 \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

Un metodo si dice di ordine p se $\exists C : \|E_{\Delta t}\| \leq C \Delta t^p \quad \forall \Delta t < k_0, t \leq T$. Questo è l'ordine locale per soluzioni regolari, l'errore globale è dello stesso ordine se il metodo è stabile.

17.0 Stabilità

Riscriviamo l'espressione per $E_{\Delta t}$ nella forma:

$$u(x, t + \Delta t) = E_{\Delta t} \cdot \Delta t + D(u(x, t))$$

Poiché applicando l'operatore D alla funzione costante a tratti $U_{\Delta t}$ si ha:

$$U_{\Delta t}(x, t + \Delta t) = D(U_{\Delta t}(x, t))$$

sottraendo queste due espressioni si ottiene:

$$\varepsilon_{\Delta t}(x, t + \Delta t) = D(\varepsilon_{\Delta t}(x, t)) - \Delta t \cdot E_{\Delta t}$$

Da notare che qui è richiesta la linearità dell'operatore D . Quindi l'errore $\varepsilon_{\Delta t}$ al tempo $t + \Delta t$ è formato da due parti, di cui una è l'errore locale ad ogni passo $-\Delta t \cdot E_{\Delta t}$, l'altra è l'errore accumulato nei passi precedenti. Allora applicando ricorsivamente tale relazione si ha, al tempo t_n :

$$\varepsilon_{\Delta t}(x, t_n) = D^n(\varepsilon_{\Delta t}(x, 0)) - \Delta t \sum_{i=1}^n D^{n-i} E_{\Delta t}$$

Perché l'errore globale sia limitato, il metodo deve essere stabile, cioè l'errore locale non deve essere amplificato negli $n-i$ passi. Il metodo alle differenze è stabile, nella forma nota come stabilità di Lax-Richtmyer, se $\exists C, k_0 > 0: \|D^n\| \leq C \quad \forall nk \leq T, k < k_0$.

18.0 Teorema di equivalenza di Lax

I soli metodi numerici utili sono, naturalmente, i metodi convergenti. Sfortunatamente, però, spesso è difficile, o addirittura impossibile, provare teoricamente la convergenza di un metodo. Per problemi lineari è della massima importanza il teorema di equivalenza di Lax il quale afferma:

i soli metodi (lineari) convergenti sono quelli che sono sia consistenti che stabili.

Per i problemi non lineari ci si basa su esperimenti numerici, cioè si osserva il comportamento della soluzione quando si infittiscono i punti griglia.

Per una classe particolare di metodi, detti monotoni, la condizione CFL già vista in precedenza costituisce una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del metodo. Se il metodo non è monotono, la CFL non è sufficiente ed infatti per il metodo dato dalla (3) abbiamo visto che non si ha mai stabilità.