

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

## Introduzione

Una equazione differenziale è un'equazione che coinvolge una o più derivate di una funzione incognita. Se tutte le derivate sono calcolate rispetto ad una sola variabile indipendente, l'equazione si dirà equazione differenziale ordinaria (ODE). Quando sono presenti derivate rispetto a più variabili indipendenti, avremo invece una equazione differenziale alle derivate parziali (PDE). Una equazione differenziale avrà *ordine*  $n$ , se  $n$  è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono.

La forma generale di una ODE di ordine  $n$  è:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

dove  $y = y(x)$  è la funzione cercata. Una funzione  $y(x)$  è detta *soluzione* di una ODE se essa riduce l'equazione ad una identità quando viene sostituita nell'equazione.

Una equazione differenziale ordinaria ha infinite soluzioni, come mostrato nel seguente esempio:

$$y' = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} + c$$

cioè la soluzione generale contiene una costante arbitraria  $c$ . Ogni volta che si fissa un valore per  $c$ , otteniamo una *soluzione particolare*. La soluzione generale di una ODE di grado  $n$ , conterrà  $n$  costanti arbitrarie. Il grafico di ogni soluzione particolare è detto *curva integrale* della ODE.

Per isolare una soluzione particolare dobbiamo aggiungere delle condizioni che sono note come *condizioni iniziali*. Per esempio, se nell'equazione precedente vogliamo che in  $x = x_0 = 1$  sia

$y = y_0 = 2$  cioè  $y(1) = 2$  si avrà':  $2 = \frac{1}{3} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{3}$  e quindi la soluzione cercata è':

$$y = \frac{x^3 + 5}{3}.$$

Il problema di cercare una soluzione particolare di una ODE con certe condizioni iniziali è' detto *problema di Cauchy* (*problema ai valori iniziali: IVP*).

## 1. ODE di ordine 1

La forma generale di una equazione differenziale ordinaria di primo ordine è:

$$F(x, y, y') = 0$$

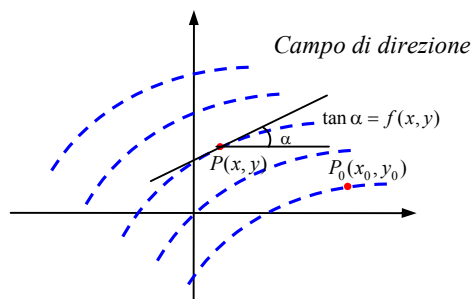
dove  $y = y(x)$  è la funzione incognita. Per semplicità assumiamo che l'equazione sia scritta nella forma:

$$y' = f(x, y)$$

con la condizione  $y = y_0$  quando  $x = x_0$ :

$$y(x_0) = y_0$$

L'interpretazione geometrica della soluzione è data dal fatto che ogni soluzione particolare è rappresentata da una curva nel piano  $(x, y)$  e, preso un punto arbitrario  $P(x, y)$ , possiamo calcolare  $f(x, y)$  che deve essere uguale alla pendenza della tangente alla curva desiderata nel punto  $P$ .



## 2. Equazioni differenziali integrabili

Una equazione differenziale ordinaria si dice *integrabile per quadrature*, se la sua soluzione generale è esprimibile in una forma esplicita o implicita, che può contenere quadrature (cioè integrali indefiniti) di qualche funzione incognita. Una quadratura può non essere esprimibile in termini di funzioni elementari, ma, ciò nondimeno, anche in tal caso l'integrazione della ODE si

ritiene completata. Sfortunatamente, perfino le più semplici equazioni differenziali ordinarie non sempre sono integrabili per quadrature ed è quindi necessario risolverle con altri metodi. Esistono comunque alcune classi di funzioni integrabili per quadrature che andiamo ad illustrare.

Un tipo di equazioni differenziali integrabili è dato dalle equazioni differenziali a *variabili separabili*, la cui forma generale è:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \varphi(y)$$

In questo caso, la soluzione generale è data da:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx + c$$

### Esempio

Consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

dove, ponendo  $f(x) = 2x$  e  $\varphi(y) = y$ , si avrà:

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

e la soluzione generale sarà data da:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx + c$$

$$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow |y| = e^{x^2+c} \Rightarrow y = \pm e^c e^{x^2}$$

Ponendo  $C = \pm e^c$ , si ha:

$$y = C e^{x^2}$$

### 3. Equazioni differenziali lineari

Una equazione differenziale ordinaria è detta *lineare*, se  $F$  è una funzione lineare nella funzione incognita e nelle sue derivate, cioè e' del tipo:

$$a(x)y' + b(x)y + g(x) = 0$$

Dividendo per  $a(x)$  si ottiene:

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (1)$$

dove:

$$p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, \quad f(x) = -\frac{g(x)}{a(x)}$$

Se  $f(x) = 0$  l'equazione è detta *omogenea lineare*. Per risolvere una equazione non omogenea, (i.e.  $f(x) \neq 0$ ) si risolve dapprima l'equazione omogenea associata:

$$z' + p(x)z = 0 \quad (2)$$

Separando le variabili si ottiene:

$$\frac{dz}{dx} = -p(x)z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -p(x)dx$$

la cui soluzione è:

$$\ln|z| = -\int p(x)dx + C \quad \Rightarrow \quad z = ce^{-\int p(x)dx} = cz_1$$

dove  $c = \pm e^C$  e  $z_1$  è ottenuta da  $z$  se  $c = 1$ .  $z_1$  è una soluzione particolare della (2). Dopo aver trovato  $z$ , si cerca la soluzione della (1) nella forma:

$$y = \varphi(x)z_1 \quad (3)$$

in cui  $\varphi(x)$  è da determinare. Sostituiamo la (3) nella  $y' + p(x)y = f(x)$  :

$$\varphi'z_1 + \varphi z_1' + p\varphi z_1 = f \quad \Rightarrow \quad \varphi'z_1 + \varphi(z_1' + p z_1) = f$$

Poiché  $z_1$  soddisfa la (2), l'espressione in parentesi è nulla. Da questo segue:

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)}{z_1(x)} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int \frac{f(x)}{z_1(x)} dx + c$$

Sostituendo la quantità appena trovata nella (3) otteniamo:

$$y = z_1(x) \int \frac{f(x)}{z_1(x)} dx + cz_1(x)$$

Questa è la soluzione generale della (1). Ponendo  $c = 0$  si ottiene il primo termine che è quindi una soluzione particolare. Questo metodo è un'applicazione di un metodo generale noto come *metodo di variazione delle costanti (di Lagrange)*.

Quindi, la soluzione generale di una ODE lineare non omogenea, è la somma di una soluzione particolare della ODE non omogenea e della soluzione generale della ODE omogenea associata.

#### 4. Funzione esponenziale

Consideriamo l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (k = \text{costante})$$

dalla quale, separando le variabili, si ottiene:

$$\frac{dy}{y} = k dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = kx + c \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{kx} \quad (4)$$

con  $c = \pm e^C$ . Se è nota una condizione iniziale  $y(x_0) = y_0$ , si ha:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ky \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Da cui:

$$y_0 = Ce^{kx_0} \Rightarrow C = y_0 e^{-kx_0}$$

e sostituendo il valore appena calcolato per  $C$  nella (4) si ha, in definitiva:

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

Se  $k > 0$  e  $y_0 > 0$ , questa espressione rappresenta una crescita esponenziale (ad esempio la riproduzione batteriologica), se  $k < 0$ , invece, rappresenta il decadimento esponenziale (ad esempio il decadimento radioattivo).

### **5. Problema di Cauchy in I-D**

Sia  $f : I \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $I \subseteq \mathfrak{R}$ , cerchiamo una funzione  $y : I \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $y$  derivabile in  $I$ , tale che:

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

con  $x_0 \in I$ . Se  $x \equiv t$ , tale problema è detto *problema ai valori iniziali*. Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità della soluzione.

### Teorema di esistenza ed unicità

Sia  $D \in \mathfrak{R}^{n+1}$  un dominio ed  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$  una funzione continua che soddisfi la condizione di Lipschitz:

$$\|f(x, u) - f(x, v)\| \leq L\|u - v\|$$

Comunque si scelgano  $(x, u), (x, v) \in D$  e qualche costante  $L > 0$  segue che:

$$\forall (x_0, u_0) \in D, \exists [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \delta > 0: \begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica in tale intervallo. ◦

Spesso trovare una soluzione della (5) per via analitica è un'operazione piuttosto difficile e se anche fosse possibile trovare tale soluzione, potrebbe comunque risultare difficoltoso ottenerne una espressione esplicita. Per tali ragioni si ricorre a metodi numerici.

### **6. Metodi numerici**

Consideriamo una successione di nodi  $\{x_i\}_{i=0}^n, x_i \in I$ :

$$x_{i+1} = x_i + h_i \quad \text{con } i = 0, \dots, n-1$$

con  $x_0$  punto della condizione iniziale ed  $h_i$  passo della discretizzazione. Supponiamo  $h_i = h$ .

Se  $a$  e  $b$  sono gli estremi di  $I$ , si ha:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

*Sviluppo in serie di Taylor di  $y(x)$  attorno ad  $x_i$*

Indicando con  $y(x_{i+1})$  la soluzione vera in  $x_{i+1}$  e con  $y_{i+1}$  la soluzione approssimata in  $x_{i+1}$ ,

e supponendo che  $y(x)$  sia sufficientemente regolare, si ha:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \dots$$

Troncando la serie al  $k$ -esimo termine, otteniamo:

$$y_{i+1} = y_i + hT_k(x_i, y_i; h)$$

con:

$$T_k(x_i, y_i; h) = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(x_i)$$

Poiché però è richiesto il calcolo delle derivate, tale metodo non è conveniente.

### 7. Metodi ad un passo.

I metodi numerici per la risoluzione di una ODE possono essere ad un passo o a più passi.

#### Definizione

Un metodo numerico si dice ad un passo (*one-step methods*), se, per  $\forall n \geq 0$ ,  $y_{n+1}$  dipende solo da  $y_n$ .

Pertanto, nei metodi ad un passo, per calcolare la soluzione ad un dato passo, si utilizza l'informazione ottenuta al passo precedente:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h)$$

Il primo metodo ad un passo che illustriamo è il metodo di Eulero.

#### a. Metodo di Eulero

Se nel procedimento visto al paragrafo precedente poniamo  $k = 1$ , otteniamo:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

noto come *metodo di Eulero in avanti*, o esplicito. Ma è possibile ottenere anche la relazione:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

che rappresenta, invece, il *metodo di Eulero all'indietro*, o implicito.



### Definizione

Un metodo si dice *esplicito*, se  $y_{i+1}$  dipende solo dai valori ai passi precedenti, mentre si dice *implicito* se  $y_{i+1}$  dipende da se stesso attraverso  $f$ . Questi ultimi metodi richiedono la soluzione di una equazione non lineare se  $f$  è non lineare in  $y$ .

### **b. Metodo dei Trapezi**

Osserviamo che se  $f$  è una funzione continua rispetto ad  $x$  e si integra tra  $x_0$  ed  $x$  la

$$y' = f(x, y(x))$$

si ha:

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x y'(\tau) d\tau = \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Approssimando l'integrale tra  $x_i$  e  $x_{i+1}$  con la formula del trapezio, si ha:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f_i + f_{i+1}]$$

nella quale si è posto  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Tale metodo è implicito.

### **c. Metodo di Heun**

È espresso dalla relazione:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f_i + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

la quale si ottiene applicando il metodo dei trapezi ed utilizzando il metodo di Eulero in avanti per calcolare  $y_{i+1}$ .

## **8. Analisi dei metodi ad un passo**

Indicando, come prima, con  $y(x_{i+1})$  la soluzione vera in  $x_{i+1}$  e con  $y_{i+1}$  la soluzione approssimata in  $x_{i+1}$ , si ha:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i); h) + \varepsilon_{i+1}$$

dove  $\varepsilon_{i+1}$  rappresenta l'errore al passo  $i+1$ . Riscriviamo tale errore nella forma:

$$\varepsilon_{i+1} = h\tau_{i+1}(h)$$

nella quale la quantità  $\tau_{i+1}(h)$  è detta *errore di troncamento locale*. Si definisce, invece, *errore di troncamento globale* la quantità:

$$\tau(h) = \max_{0 \leq i \leq N-1} |\tau_{i+1}(h)|$$

La funzione incremento  $\phi$  caratterizza completamente il metodo ad un passo ed è tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi(y_i, y(x_i); h) = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

pertanto, poiché:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = y'(x_i)$$

si ha:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0$$

da cui:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$$

che dà la consistenza del metodo numerico con il problema di Cauchy.

### Definizione

Un metodo si dice *consistente* quando  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ .

Si dice *consistente di ordine  $p$* , se:

$$\tau(h) = O(h^p) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

### Esercizio

Dimostrare la consistenza dei metodi di Eulero e Heun.

### 9. Zero-stabilità

Un metodo numerico del tipo  $y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h)$  si dice *zero-stabile*, se:

$$\exists h_0 \in \mathbb{R}^+, \exists C > 0 : |z_i - y_i| \leq C\varepsilon \quad \forall h \in [0, h_0]$$

dove  $z_i$  ed  $y_i$  sono le soluzioni del problema perturbato e di quello non perturbato:

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i + h[\phi(x_i, z_i; h) + \delta_{i+1}] \\ z_0 = y_0 + \delta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

con  $|\delta_i| \leq \varepsilon$ . Tale stabilità riguarda il comportamento del metodo numerico quando  $h \rightarrow 0$ . Se il metodo è zero-stabile la soluzione è poco sensibile alle perturbazioni dei dati.

### Definizione

Un metodo si dice *convergente* se  $\forall i, |y(x_i) - y_i| \leq C(h)$ , dove  $C(h)$  è un infinitesimo rispetto ad  $h$ , e in tal caso si dice *convergente di ordine  $p$*  se  $\exists C > 0$  tale che:  $C(h) = Ch^p$ .

### Teorema di convergenza

Sia  $y(x)$  soluzione di:

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ed  $y_{i+1}$  la soluzione approssimata data da  $y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h)$ . Supponiamo, inoltre, che  $\phi$  sia lipschitziana nella seconda variabile:

$$|\phi(x, u; h) - \phi(x, v; h)| \leq L|u - v| \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\text{con: } 0 \leq h \leq b - a, \quad -\infty < u, v < \infty, \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

Sia, infine:  $\tau = \max|\tau_i|, \quad y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i); h) + h\tau_i$

Allora:

$$|e_i| \equiv |y(x_i) - y_i| \leq \frac{\tau}{L} [e^{L(x_i - x_0)} - 1] \quad \text{con: } i = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione:*

Consideriamo la quantità  $e_{i+1}$ , cioè l'errore globale, data da:

$$e_{i+1} = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

Sostituendo  $y(x_{i+1})$  e  $y_{i+1}$  con i rispettivi valori dati dalle ipotesi del teorema di ottiene:

$$e_{i+1} = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i); h) + h\tau_i - y_i - h\phi(x_i, y_i; h) = e_i + h[\phi(x_i, y(x_i); h) - \phi(x_i, y_i; h)] + h\tau_i$$

Passando ai valori assoluti e tenendo conto che dalle ipotesi segue la disuguaglianza

$$|\phi(x, y(x_i); h) - \phi(x, y_i; h)| \leq L|e_i| \quad \text{e che } \tau = \max|\tau_i|, \text{ si ha:}$$

$$|e_{i+1}| \leq (1 + hL)|e_i| + h\tau$$

da cui segue:

$$|e_1| \leq (1 + hL)|e_0| + h\tau$$

$$|e_2| \leq (1 + hL)|e_1| + h\tau \leq (1 + hL)^2|e_0| + h\tau[1 + (1 + hL)]$$

.....

$$|e_n| \leq (1 + hL)^n |e_0| + h\tau \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL}$$

Ma tenendo conto che  $(1 + \alpha)^n \leq \exp(\alpha n)$ , con  $\alpha > 0, e_0 = 0$  e semplificando  $h$  si ha:

$$|e_n| \leq \frac{\tau}{L} [\exp(L(x_n - x_0)) - 1]$$

cioè la tesi. •

Si ha il seguente teorema per la convergenza di un metodo ad un passo.

Teorema (Lax-Richtmyer)

Un metodo ad un passo è convergente se e solo se è consistente e zero-stabile. ◦

Usando gli sviluppi di Taylor, si può vedere che il metodo di Eulero esplicito ha ordine di convergenza uno, mentre i metodi dei trapezi e di Heun hanno ordine due.

Analizziamo più in dettaglio l'errore del metodo di Eulero esplicito per vedere in che modo è possibile limitare tale errore.

**10. Interpretazione geometrica degli errori per i metodi ad un passo**

Sia  $y(x)$  la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

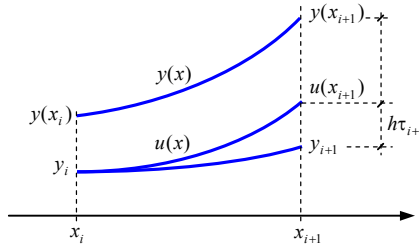
e sia  $y_i$  una approssimazione ad  $y(x_i)$  in qualche punto  $x_i$ .  $y(x_i) - y_i$  rappresenta l'errore globale cioè la quantità che vogliamo tenere limitata da una certa accuratezza, errore che, come visto, è difficile da stimare. Quello che vogliamo fare è controllare l'errore globale controllando l'errore locale. Sia  $u(x)$  una curva integrale di  $y' = f(x, y)$  che passa per  $y_i$ , cioè che soddisfa:

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_i) = y_i \end{cases}$$

L'errore locale è dato dalla differenza  $u(x_{i+1}) - y_{i+1}$  e ci dice quanto bene può essere seguita la curva  $u(x)$  con un passo. Se la soluzione approssimata è calcolata da

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h):$$

si ha il grafico seguente:



Infatti, l'errore globale e l'errore locale sono correlati dalla seguente espressione:

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = [y(x_{i+1}) - u(x_{i+1})] + [u(x_{i+1}) - y_{i+1}]$$

L'errore globale ha quindi due componenti:

- i)  $y(x_{i+1}) - u(x_{i+1})$  che misura quanto distano le due curve integrali  $y(x)$  e  $u(x)$ . Tale misura dipende, quindi, dalla equazione differenziale ordinaria ed è legata alla *stabilità* del problema.
- ii)  $u(x_{i+1}) - y_{i+1}$  che misura quanto bene il metodo risolve:

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_i) = y_i \end{cases}$$

Tale misura, quindi, è legata al metodo e può essere resa piccola aumentando l'accuratezza del metodo (o decrescendo il passo  $h$ , o aumentando l'ordine del metodo).

Ricaviamo la quantità  $u(x_{i+1}) - y_{i+1}$ :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h\phi(x_i, u(x_i); h) + h\tau \quad (6)$$

Tenendo conto che  $u(x_i) = y_i$ , l'approssimazione  $y_{i+1}$  può essere scritta nel modo seguente:

$$y_{i+1} = u(x_i) + h\phi(x_i, u(x_i); h)$$

il cui lato destro può essere sostituito nella (6) con il lato sinistro, ottenendo:

$$u(x_{i+1}) = y_{i+1} + h\tau \quad \Rightarrow \quad u(x_{i+1}) - y_{i+1} = h\tau \quad (7)$$

Supponiamo di utilizzare due metodi: uno di ordine  $p$  e l'altro di ordine  $q$ . Vediamo in che modo è possibile stimare l'errore locale, partendo per entrambi i metodi da  $(x_i, y_i)$ :

$$y_{i+1} = y_i + h\phi_1(x_i, y_i; h) \quad p$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\phi_2(x_i, y_i; h) \quad q$$

avendo supposto  $p < q$ .

Si ha: 
$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h\phi_1(x_i, u(x_i); h) + h\tau$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h\phi_2(x_i, u(x_i); h) + h\tilde{\tau}$$

Ragionando come sopra, otteniamo:

$$y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1} = h\tau - h\tilde{\tau} \quad \text{ovvero} \quad y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1} = h\tau + O(h^{q+1})$$

quindi:

$$h\tau \sim y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

il che significa, sostituendo nella (7):

$$u(x_{i+1}) - y_{i+1} \cong y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

## 11. Assoluta stabilità

Tale tipo di stabilità riguarda la propagazione degli errori accumulati ai passi precedenti. Un metodo si dice assolutamente stabile se, per  $h$  fissato,  $y_i$  è limitato per  $t_i \rightarrow \infty$ . Consideriamo il *problema test*:

$$\begin{cases} y' = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

dove  $t > 0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La soluzione sarà del tipo  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ .

### Definizione

Un metodo numerico si dice *assolutamente stabile* se  $y_i$ , soluzione numerica della (8), è tale che:

$$y_i \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad t_i \rightarrow \infty \quad (9)$$

Poiché  $y_i$  è funzione di  $h\lambda$ , definiamo *regione di assoluta stabilità* l'insieme:

$$\text{regione di assoluta stabilità} \equiv \{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \text{è vera la } (9)\}$$

Vediamo allora le regioni di A-stabilità di alcuni metodi e studiamo sotto quali condizioni essi risultano stabili.

#### 11.1 Metodo di Eulero in avanti (esplicito)

Applichiamo il metodo al problema test:

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Da cui:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h\lambda y_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{i+1} = (1 + h\lambda)y_i \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_i = (1 + h\lambda)^i$$

quindi la (9) è vera se  $|1 + h\lambda| < 1$ . Se consideriamo l'insieme dei punti:

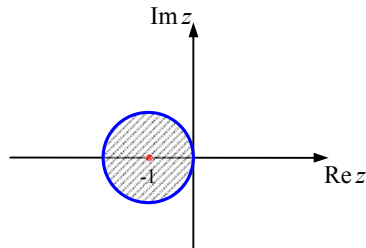
$$\{z = h\lambda \in \mathbb{C}^- : |1 + z| = 1\}$$

dove  $\mathbb{C}^-$  è definito nel modo seguente:



$$C^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

otteniamo il bordo di un cerchio di centro in  $-1$  e raggio  $1$ . Per quanto detto in precedenza, quindi, la regione di assoluta stabilità  $A$  è data dai punti interni a tale cerchio, come mostrato nella seguente figura:



$$h\lambda \in C^-, \text{ con } 0 < h < -\frac{2\operatorname{Re}(\lambda)}{|\lambda|^2}.$$

### 11.2 Metodo di Eulero all'indietro (implicito)

In questo metodo, il valore approssimato è dato dall'espressione:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i + h\lambda y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1}(1 - h\lambda) = y_i \Rightarrow y_i = \frac{1}{(1 - h\lambda)^i}$$

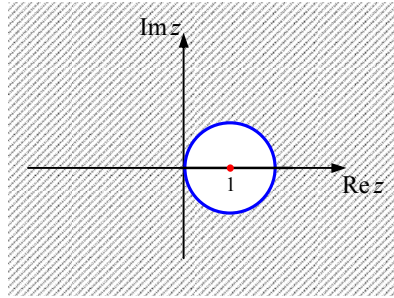
in questo caso la (9) è vera se  $|1 - h\lambda| > 1$ . Se consideriamo l'insieme dei punti:

$$\{z = h\lambda : |z - 1| = 1\}$$

otteniamo il bordo di un cerchio di centro in  $1$  e raggio  $1$ . La regione  $A$  di assoluta stabilità è data da:

$$\forall h\lambda \in \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1\}.$$

Graficamente:



### 11.3. Metodo dei trapezi

Il valore approssimato è dato dall'espressione:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} \left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) = y_i \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)$$

da cui otteniamo:

$$y_{i+1} = y_i \left( \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right) \Rightarrow y_i = \left( \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^i$$

In questo caso la (9) è vera se  $\left| \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda} \right| < 1$ , cioè se  $\text{Re}(h\lambda) < 0 \Rightarrow h\lambda \in \mathbb{C}^-$ .

### 11.4 Metodo di Heun

Il valore approssimato è dato dall'espressione:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(\lambda y_i + \lambda(y_i + h\lambda y_i)) =$$

$$= y_i + \frac{h\lambda}{2} y_i + \frac{h\lambda}{2} y_i + \frac{h^2 \lambda^2}{2} y_i = y_i \left( 1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right)$$

La (9) è vera se  $\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right| < 1$ .

Diremo che un metodo è *A-stabile* se  $A \cap \mathbb{C}^- = \mathbb{C}^-$ .

I metodi di Eulero esplicito ed Heun sono condizionatamente assolutamente stabili; il metodo dei trapezi ed il metodo di Eulero implicito sono, invece,  $A$ -stabili. Si possono avere metodi impliciti stabili, o condizionatamente stabili, ma non si possono avere metodi espliciti incondizionatamente stabili.

## 12. Metodi di Runge-Kutta

Tutti i metodi ad un passo possono essere dedotti, come già detto, dallo sviluppo in serie di Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + hT_k(x_i, y_i; h)$$

dove:

$$T_k(x_i, y_i; h) = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + \dots + \frac{h^{k-1}}{k!} y^{(k)}(x_i)$$

Il calcolo delle derivate di  $f$ , però, può essere oneroso. D'altronde, i metodi visti in precedenza sono di basso ordine. Un buon compromesso tra la semplicità dei metodi di basso ordine e la serie di Taylor troncata ad un alto ordine, è dato dai metodi di Runge-Kutta. Rispetto ai metodi multi-step che vedremo più avanti, si ha lo svantaggio che occorrono molte valutazioni della  $f$  per raggiungere la stessa accuratezza. L'idea dei metodi di Runge-Kutta è di costruire formule del tipo:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i; h)$$

con  $\phi$  coincidente con  $T_k$  per un certo numero di termini, senza l'utilizzo esplicito delle derivate.

Per un metodo di ordine  $k$ :

$$\phi(x_i, y_i; h) = A_1 f(\mathcal{G}_1, \gamma_1) + \dots + A_k f(\mathcal{G}_k, \gamma_k)$$

mentre per il metodo di Eulero, che può essere interpretato come Runge-Kutta del primo ordine, il punto  $(\mathcal{G}_1, \gamma_1) \equiv (x_i, y_i)$ . Nei metodi di Runge-Kutta del **secondo ordine**, invece, si hanno i punti:

$$(x_i, y_i), (x_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(x_i, y_i))$$

quindi:

$$y_{i+1} = y_i + h[A_1 f(x_i, y_i) + A_2 f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(x_i, y_i))]$$

Espandiamo  $f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(x_i, y_i))$  attorno al punto  $(x_i, y_i)$ :

$$f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i) + \alpha h f_x(x_i, y_i) + \alpha h f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i) + O(h^2)$$

da cui segue:

$$y_{i+1} = y_i + h[A_1 f(x_i, y_i) + A_2 (f(x_i, y_i) + \alpha h f_x(x_i, y_i) + \alpha h f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i))]$$

e da cui si ricava:

$$\phi(x_i, y_i; h) = (A_1 + A_2) f + A_2 \alpha h (f_x + f_y f)$$

ma:

$$T_2(x_i, y_i; h) = f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} (f_x + f_y f)$$

quindi, affinché si abbia  $\phi = T_2$  devono valere le condizioni:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \alpha A_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

che danno luogo ad una famiglia di metodi di Runge-Kutta del secondo ordine. I più noti, tra tali metodi, sono quello di Eulero modificato, di Heun e di Ralston.

Nel *metodo di Eulero modificato* si hanno i seguenti valori:

$$\alpha = \frac{1}{2}, A_1 = 0, A_2 = 1$$

per cui:

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right)$$

il che è equivalente a calcolare  $y_{i+\frac{1}{2}}$  con Eulero esplicito:

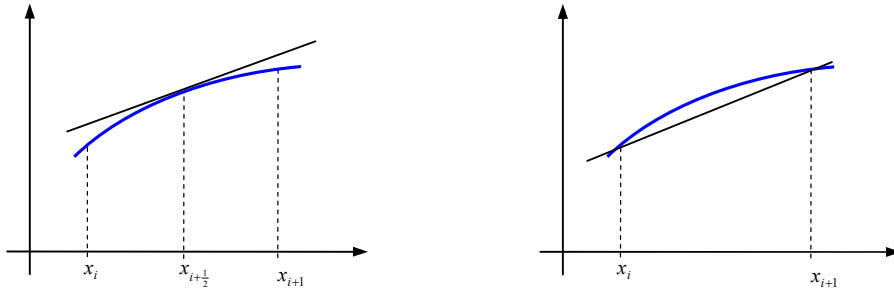
$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

calcolare la pendenza:

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$

ed utilizzarla per tutto l'intervallo:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$



Il **metodo di Heun**, invece, prevede i seguenti valori:

$$\alpha = 1, A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$$

per cui:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

ed è utilizzato per rendere esplicito il metodo dei trapezi.

Il **metodo di Ralston**, infine, è dato dai seguenti valori:

$$\alpha = \frac{3}{4}, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3}$$

per cui:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3} [k_1 + 2k_2]$$

dove:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad \text{e} \quad k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1)$$

Tale metodo dà il minimo errore di troncamento.

In generale, i metodi di **Runge-Kutta espliciti** sono caratterizzati dall'espressione:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^m c_j k_j$$

dove:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_j = f\left(x_i + \alpha_j h, y_i + h \sum_{l=1}^{j-1} \beta_{jl} k_l\right) \quad \text{per } j = 2, \dots, m$$

Il numero  $m$  caratterizza il numero di *stadi* del metodo che rimane comunque ad un passo.

Il metodo più noto è quello del quarto ordine:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dove:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3)$$

Metodi di ordine maggiore non sono convenienti poiché richiedono un numero troppo grande di valutazioni della funzione  $f$ .

### ***Proprieta'***

Un metodo di R-K esplicito ad  $m$  stadi non può avere ordine maggiore di  $m$ . Inoltre non esistono metodi di R-K espliciti ad  $m$  stadi di ordine maggiore o uguale a 5.

### **13. Metodi di Runge-Kutta a passo variabile**

Essendo metodi ad un passo, è semplice rendere tale passo adattivo, cioè tale da ridurre l'errore. Per ridurre l'errore è necessario poterlo stimare. L'operazione di stima può essere compiuta in due modi:

- i) usare lo stesso metodo, ma con due passi differenti ( $h$  e  $2h$ );
- ii) usare due metodi di ordine differente, ma con lo stesso numero di stadi.

i) Metodo di ordine  $p$ . Partendo dal dato esatto:

$$y(x_n) = y_n$$

supponiamo che l'errore locale sia minore di  $\varepsilon$ . Si ha:

$$-y_{n+1} + y(x_{n+1}) = \phi(y_n)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

dove  $\phi(y_n)$  è una funzione incognita. Ripetendo lo stesso calcolo, ma con passo  $2h$ , a partire da  $x_{n-1}$ , si ha:

$$-\hat{y}_{n+1} + y(x_{n+1}) = \phi(y_n)(2h)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

Sottraendo tra loro le due espressioni appena ottenute e considerando i due passi  $h$  e  $2h$ , rispettivamente, otteniamo:

$$(2^{p+1} - 1)h^{p+1}\phi(y_n) = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

da cui segue:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \sim \frac{y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}}{2^{p+1} - 1} \equiv \xi$$

Se  $|\xi| < \varepsilon$  si prosegue, altrimenti si dimezza il passo. In generale, il passo si raddoppia se

$$|\xi| < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

- ii) Come visto nel paragrafo 10, usando due schemi di ordine  $p$  e  $p+1$ , la differenza fra le soluzioni approssimate dà una stima dell'errore di troncamento locale per lo schema di ordine inferiore.

#### 14. Metodi multistep

Per ottenere i metodi multistep, integriamo una equazione differenziale ordinaria tra  $t_{n-j}$  e  $t_{n+k}$ , ottenendo:

$$y(t_{n+k}) = y(t_{n-j}) + \int_{t_{n-j}}^{t_{n+k}} f(t, y(t)) dt$$

e, supponendo la suddivisione uniforme dell'intervallo, applichiamo una quadratura di Newton-Cotes, utilizziamo  $q+1$  punti  $t_{n-q}, t_{n-q+1}, \dots, t_n$  e costruiamo il polinomio di Lagrange, integrando poi in  $[t_{n-j}, t_{n+k}]$ :

$$p_q(x) = \sum_{i=0}^q f(t_{n-i}, y_{n-i}) L_i(x)$$

dove:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{n-l}}{x_{n-i} - x_{n-l}}$$

Integrando il polinomio si ha:

$$y_{n+k} = y_{n-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{n-i} \quad (10)$$

dove:

$$f_l \equiv f(t_l, y_l) \quad \text{e} \quad \beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{t_{n-j}}^{t_{n+k}} L_i(t) dt = \int_{-j}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x+l}{-i+l} dx$$

I valori assunti da  $k, j$  e  $q$  determinano i vari metodi multistep:

- se  $k=1, j=0$  otteniamo i metodi di Adams-Bashfort espliciti;
- se  $k=0, j=1$  otteniamo i metodi di Adams-Moulton impliciti;
- se  $k=1, j=1$  otteniamo il metodo di Nyström.



### **14.1 Metodi di Adams-Bashforth espliciti**

Sono caratterizzati da  $k = 1, j = 0$ . La (10) diventa:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{n-i}$$

e se  $q = 0$ , allora otteniamo il *metodo di Eulero esplicito*, caratterizzato dall'espressione:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

### **14.2 Metodi di Adams-Moulton impliciti**

Sono caratterizzati da  $k = 0, j = 1$ . La (10) diventa:

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{n-i}$$

sebbene sia preferibile scriverla nel modo seguente:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{n-i+1}$$

Se  $q = 0$ , allora otteniamo il *metodo di Eulero implicito*, caratterizzato dall'espressione:

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$$

mentre se  $q = 1$ , otteniamo il *metodo di Crank-Nicholson* (metodo dei trapezi), caratterizzato da:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

### 14.3 Metodo di Nyström

E' caratterizzato da  $k = 1, j = 1$ . La (10) diventa:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_{qi} f_{n-i}$$

e se  $q = 0$ , otteniamo il *metodo del punto medio*, caratterizzato dall'espressione:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n)$$

### 15 Metodi Predictor-Corrector

Risolviendo un problema di Cauchy non lineare con uno schema implicito, è richiesta, ad ogni passo, la risoluzione di una equazione non lineare. A questo scopo, si possono utilizzare i metodi di punto fisso, il metodo di Newton o il metodo delle secanti. Ciò, però, richiederà un valore iniziale sufficientemente vicino alla soluzione sia per problemi di convergenza, sia per minimizzare il numero di iterazioni. Cio' puo' essere ottenuto utilizzando, in coppia, un metodo esplicito ed un metodo implicito. Il metodo esplicito (predictor) fornira' un buon dato iniziale per il metodo implicito (corrector) che è generalmente più stabile.

Un esempio di tale metodo è quello di Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf_n)]$$

in cui il predictor è il metodo di Eulero in avanti, mentre il corrector è il metodo di Cranck-Nicholson:

$$\text{Predictor} \quad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$\text{Corrector} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})]$$

L'ordine di convergenza totale del metodo sarà  $q$  se il predictor ha ordine  $q-1$  ed il corrector ha ordine  $q$ . In genere si utilizzano i metodi di Adams in coppia (2-3, 3-4) per ottenere metodi PC di ordine pari a quello del corrector.

## 16 Metodi BDF (Backward Differentiating Formula)

E' una famiglia di schemi complementari a quelli di Adams. Mentre nei metodi di Adams si usa una quadratura per approssimare l'integrale, nei BDF si approssima la  $y'$ . Se si hanno  $q+1$  punti e si conosce una approssimazione della soluzione nei punti  $n-q+1, \dots, n+1$  è possibile determinare un  $p \in P_q$  la cui derivata interpola la  $y'$ . Calcoliamo la derivata in uno dei nodi  $t_k$ :

$$p'(t_k) = f(t_k, y_k)$$

Se  $k = n$  il metodo è esplicito, se  $k = n+1$  il metodo sarà implicito. In generale:

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{n-i+1} = hf_n \quad \text{metodo esplicito}$$

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{n-i+1} = hf_{n+1} \quad \text{metodo implicito}$$

dove i coefficienti sono dati dalle derivate del polinomio di Lagrange. Ad esempio:

$q = 1$  metodo di Eulero in avanti

$q = 2$  metodo del punto medio

$q = 3$  instabile

## 17 Metodi LMM (Linear Multistep Method)

Una generalizzazione dei metodi multistep che include i metodi di Adams e i metodi BDF, è data dalla famiglia dei metodi multistep lineari. Un metodo multistep lineare ha la forma:

$$\sum_{i=0}^q \alpha_i y_{n-i} = h \sum_{i=0}^q \beta_i f_{n-i}$$

### 18 Equazioni alle differenze lineari

Per una analisi dei metodi multistep è necessario sviluppare un po' di nozioni teoriche sulle equazioni alle differenze lineari. Una equazione nella forma:

$$a_k z_{n+k} + a_{k-1} z_{n+k-1} + \dots + a_1 z_{n+1} + a_0 z_n = b_n$$

è detta *equazione lineare alle differenze di ordine k*, dove  $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, b_n$  sono funzioni di  $n$ , essendo  $n$  appartenente all'insieme dei numeri interi consecutivi. Cominciamo con il considerare il caso di una equazione omogenea:

$$a_k z_{n+k} + a_{k-1} z_{n+k-1} + \dots + a_1 z_{n+1} + a_0 z_n = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

Se  $a_k \neq 0$ , allora si può trovare una soluzione per ogni scelta dei valori iniziali  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$  e tale soluzione è unica. Se  $z_i = 0$  con  $i = 0, \dots, k-1$ , si ha l'unica soluzione  $z_k = 0$ . Chiaramente, una soluzione è data da una qualunque successione che verifichi l'equazione data. Poiché tali equazioni sono collegate alla soluzione delle equazioni differenziali ordinarie, l'indice discreto  $n$  della successione sostituisce la variabile indipendente continua  $t$  delle equazioni differenziali ordinarie.

Se due successioni  $\{y_n\}, \{z_n\}$  sono soluzioni, allora anche  $Ay_n + Bz_n$  è soluzione, con  $A$  e  $B$  costanti arbitrarie. La soluzione generale può essere scritta come  $\{y_n + z_n\}$ , dove  $\{y_n\}$  è la soluzione dell'equazione omogenea e  $z_n$  una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, che può essere trovata risolvendo rispetto ad un particolare valore iniziale.

Infine, due soluzioni sono *linearmente indipendenti* in  $n$  se  $\exists A, B : A^2 + B^2 > 0 : Ay_n + Bz_n = 0$   
 $n=0,1,\dots$

In analogia alle ODE lineari, si cercano soluzioni della forma:

$$z_n = x^n .$$

Per cui, sostituendo nell'equazione, si ha:

$$a_k x^{n+k} + a_{k-1} x^{n+k-1} + \dots + a_1 x^{n+1} + a_0 x^n = 0 .$$

Dividendo per  $x^n$  si ha:

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

cioe'  $x$  e' una radice del polinomio caratteristico:

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Se  $r_1, r_2, \dots, r_k$  sono gli zeri di  $p(x)$ , allora:

$$z_i = \gamma_1 (r_1)^i + \gamma_2 (r_2)^i + \dots + \gamma_k (r_k)^i \quad i = 0, 1, \dots$$

e' soluzione della equazione.

*Esempio*

$$z_{n+2} + z_{n+1} - 6z_n = 0$$

$$p(x) = x^2 + x - 6 \quad r_1 = 2, r_2 = -3$$

$$z_i = \gamma_1 2^i + \gamma_2 (-3)^i \quad i = 0, 1$$

con  $\gamma_1, \gamma_2$  costanti.

Se una radice ha molteplicita'  $m$  allora:

$$\{r^i\}, \{i r^i\}, \dots, \{i^{m-1} r^i\} \quad i = 0, 1, \dots$$

soddisfano l'equazione alle differenze.

*Esempio*

$$p(x) = (x - 2)^3 (x - 3)^2$$

$$z^i = \gamma_1 2^i + \gamma_2 i 2^i + \gamma_3 i^2 2^i + \gamma_4 3^i + \gamma_5 i 3^i \quad i = 0, \dots, k-1.$$

## 19 Convergenza

Per i metodi multistep l'analisi della convergenza è più complicata rispetto ai metodi ad un passo in quanto:

- i) la soluzione approssimata è influenzata anche dagli errori nei valori di partenza:  
 $e_j = y_j - y(x_j)$  per  $j = 0, \dots, k-1$ . Tali valori si dicono consistenti se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_j(h) - y(x_j)| = 0 \quad j = 0, \dots, k-1$$

- ii) i metodi multistep possono essere instabili. Per mostrare ciò consideriamo il problema test:

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è  $y(x) = e^{\lambda x}$ . Analizziamo il comportamento di qualche metodo multistep nel caso  $\lambda < 0$ . Consideriamo il metodo del punto medio:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}$$

la cui equazione alle differenze associata è:

$$x^2 - 2h\lambda x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$r_1 = h\lambda + \sqrt{1 + h^2\lambda^2} \quad \text{e} \quad r_2 = h\lambda - \sqrt{1 + h^2\lambda^2}$$

La soluzione generale di tale equazione è:

$$y_n = \beta_1 r_1^n + \beta_2 r_2^n$$

Ricaviamo  $\beta_1$  e  $\beta_2$ :

$$\begin{cases} y_0 = 1 = \beta_1 + \beta_2 \\ y_1 = e^{h\lambda} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 \end{cases}$$

da cui segue:

$$\beta_1 = \frac{e^{h\lambda} - r_2}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = 1 + O(h^2\lambda^2) \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{r_1 - e^{h\lambda}}{2\sqrt{1+h^2\lambda^2}} = O(h^3\lambda^3)$$

Osserviamo che:

Per  $h \rightarrow 0, \beta_1 \rightarrow 1, \beta_2 \rightarrow 0$

Per  $\lambda > 0, |r_1| > |r_2| > 0$  ed il termine dominante è  $\beta_1 r_1^n$

Per  $\lambda < 0, 0 < |r_1| < 1, r_2 < -1$  ed il termine dominante è  $\beta_2 r_2^n$

Pertanto, per  $\lambda < 0$  la soluzione diverge da quella vera. Questo accade perché la ODE ha una sola soluzione, mentre l'equazione alle differenze di ordine  $k$  ha  $k$  soluzioni di cui una corrisponde alla soluzione vera. Perché si abbia convergenza è quindi necessario che le altre soluzioni rimangano limitate. Analizziamo, quindi, il comportamento delle equazioni alle differenze relativamente al problema della stabilità.

### Definizione

L'equazione alle differenze:

$$Z_{n+k} + \sum_{m=0}^{k-1} a_m z_{n+m} = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

con coefficienti  $a_0, \dots, a_{k-1}$  costanti è detta *stabile*, se tutte le sue soluzioni sono limitate.

Per cercare delle condizioni facilmente verificabili per stabilire la convergenza di un metodo multistep, partiamo dall'errore locale di discretizzazione:

$$h\tau = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x+hj) - h \sum_{j=0}^k \beta_j y'(x+hj)$$

Abbiamo visto che il metodo è consistente se  $\tau \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$ . E' detto di ordine  $p$  se  $\tau h = \theta(h^{p+1})$ . Se  $y(x)$  è sufficientemente differenziabile, si può esprimere  $h\tau$  come:

$$h\tau = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \dots + C_p h^p y^{(p)}(x) + \dots$$

Infatti, espandendo  $y(x+hj)$  e  $y'(x+hj)$  intorno ad  $x$ , si ha:

$$y(x+hj) = y(x) + hjy'(x) + y''(x) \frac{(hj)^2}{2} + \dots$$

$$y'(x+hj) = y'(x) + hjy''(x) + y'''(x) \frac{(hj)^2}{2} + \dots$$

che dà  $h\tau$  se poniamo:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k)$$

.....

$$C_n = \frac{1}{n!} (\alpha_1 + 2^n \alpha_2 + \dots + k^n \alpha_k) - \frac{1}{(n-1)!} (\beta_1 + 2^{n-1} \beta_2 + \dots + k^{n-1} \beta_k)$$

.....

Se  $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ ,  $C_{p+1} \neq 0$  allora il metodo è di ordine  $p$ .

Vediamo quali sono le proprietà di un metodo convergente: *se il metodo multistep converge,  $C_0$  deve essere nullo*. Infatti, sia dato il problema:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

avente soluzione  $y(x) = 1$ . Allora segue che:



$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0$$

Fissiamo  $\bar{x}$  e definiamo  $n$  ed  $h$  tali che  $\bar{x} = (n+k)h + x_0$ , con  $x_0 = 0$ . Supponiamo che il metodo sia convergente, ma non alla soluzione  $y = 1$ . Si ha:

$$y_{n+k} \rightarrow y(\bar{x}) \text{ per } h \rightarrow 0$$

$$y_{n+j} \rightarrow y(\bar{x}) + \varphi_j(h) \text{ con } 0 \leq j \leq k, \text{ } k \text{ fissato e } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_j(h) = 0$$

Quindi:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y(\bar{x}) + \sum_{j=0}^k \alpha_j \varphi_j(h) = 0 \quad (11)$$

Ma:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \varphi_j(h) = 0$$

per cui la (11) diventa:

$$0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(\bar{x}) = y(\bar{x}) \sum_{j=0}^k \alpha_j$$

da cui segue che  $C_0 = 0$ .

Mostriamo adesso che *un metodo convergente alla soluzione, ha almeno ordine 1*. Infatti, sia dato il problema:

$$\begin{cases} y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è  $y(x) = x$ . Allora ne segue che:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j$$

Una soluzione è data da:

$$y_i = ihM \quad \text{con} \quad M = \frac{\sum_{j=0}^k \beta_j}{\sum_{j=0}^k j\alpha_j}$$

Se  $\bar{x} = (n+k)h$ , ne segue che  $y_{n+k} = (n+k)hM$  e poiché la soluzione è  $y(x) = x$ , si ha:

$$\text{ponendo } M = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^k \beta_j = \sum_{j=0}^k j\alpha_j$$

$$\begin{aligned} \text{ma poiché:} \quad C_1 &= \sum_{j=0}^k \beta_j - \sum_{j=0}^k j\alpha_j \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

Un metodo che è almeno di ordine 1 è detto consistente. Allora una condizione necessaria per la convergenza è la consistenza, ma essa non è sufficiente. Solo se anche la **condizione della radice** è soddisfatta si ha convergenza. Infatti, se il metodo è convergente, lo sarà pure per il problema:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è  $y(x) = 0$ . Ne segue che:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0$$

la quale è soddisfatta da  $y_m = h(r_i)^m$ , dove  $r_i$  è soluzione del polinomio caratteristico. Affinché si abbia convergenza, si deve avere:

$$y_{n+k} \xrightarrow{h \rightarrow 0} y(\bar{x})$$

Ma  $y_{n+k} = h(r_i)^{n+k}$ , per cui:

$$y_{n+k} \rightarrow y(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow |r_i| \leq 1$$

Se  $r_i$  non è uno zero semplice, ma ha molteplicità  $m$ :

$$y_j = h_j^q (r_i)^j \quad \text{con } j = 0, 1, \dots \quad q \leq m - 1$$

Per  $j = n + k$  si ha:

$$y_{n+k} = h(n+k)^q (r_i)^{n+k}$$

ma  $h(n+k) = \bar{x}$  quindi:

$$y_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |r_i| < 1$$

La condizione della radice è:

- 1)  $|r_i| \leq 1$  se  $r_i$  è uno zero semplice del polinomio caratteristico.
- 2)  $|r_i| < 1$  se  $r_i$  non è uno zero semplice del polinomio caratteristico.

Per un metodo consistente, il polinomio caratteristico ha una radice  $r_i = 1$  detta *radice principale*. Infatti, in tal caso:

$$C_0 = 0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j \quad \Rightarrow \quad p(1) = 0$$

I metodi:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1} \quad \text{e} \quad y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$$

hanno  $p(x) = x^2 - 1$  e quindi soddisfano il criterio della radice, sono consistenti e quindi convergenti, eppure non sono buoni da utilizzare in pratica. Infatti, abbiamo già visto che per i metodi multistep non basta la sola convergenza, poiché le equazioni alle differenze hanno soluzioni in più rispetto alla equazione differenziale ordinaria. Tali soluzioni, dette *parasitiche*, devono rimanere piccole rispetto alla radice principale e ciò porta al concetto di stabilità relativa.

Applicando allora un metodo multistep al problema test:

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è  $y(x) = e^{\lambda x}$ , si ha:

$$y_m = \gamma_1 e^{mh\lambda} + \gamma_2 (r_2)^m + \dots + \gamma_k (r_k)^m + \theta(h^{p+1})$$

soluzione del problema test:

$$y(x_m) = y_0 e^{mh\lambda}$$

Questo significa che  $y_m$  è una buona approssimazione di  $y(x_m)$  se:

- 1)  $\gamma_1 \sim y_0, \gamma_i \sim 0$  per  $i = 2, \dots, k$   
 2)  $r_i \ll e^{h\lambda}$  per  $i = 2, \dots, k$

Si noti che il punto 1) è soddisfatto se i valori di partenza sono buoni, mentre il punto 2) è legato alla stabilità relativa.

Un metodo multistep si dirà *relativamente stabile* se:

$$|r_1| > |r_i| \quad \text{per } i = 2, \dots, k$$

L'intervallo di stabilità relativa è il più grande intervallo  $(\alpha, \beta)$ , con  $\alpha \leq 0 \leq \beta$ , tale che il metodo è relativamente stabile  $\forall h\lambda \in (\alpha, \beta)$ . Se  $\lambda$  è grande,  $h$  dovrà essere piccolo. Con tale tipo di stabilità si controlla l'errore relativo. Infatti:

$$y_m = \gamma_1 (r_1)^m \left[ 1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^m + \dots + \frac{\gamma_k}{\gamma_1} \left( \frac{r_k}{r_1} \right)^m \right]$$

## 20 Assoluta stabilità

Spesso è importante fare un'analisi di stabilità tenendo il passo  $h$  fissato e ciò permette di controllare l'errore assoluto. Un metodo è *assolutamente stabile* se gli errori ai passi precedenti non aumentano. Tale concetto si applica anche ai metodi one-step, come abbiamo già visto nel paragrafo 11. Applicando il metodo multistep:

$$y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

al problema test:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

si ha:

$$y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h\lambda \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j}$$

che può essere scritto anche:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - h\lambda \beta_j) y_{n+j} = 0$$

Per  $x = x_n$  si ha:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - h\lambda \beta_j) y(x_{n+j}) = ht_n$$

e sottraendo membro a membro queste due espressioni otteniamo:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - h\lambda \beta_j) l_{n+j} = ht_n$$

Quindi gli errori soddisfano una equazione alle differenze le cui soluzioni sono:

$$l_m = \mu_1 (\bar{r}_1)^m + \dots + \mu_k (\bar{r}_k)^m - \frac{ht}{h\lambda \sum_{j=0}^k \beta_j}$$

Diremo che un metodo multistep soddisfa la condizione assoluta delle radici, se esiste un  $h_0 > 0$  tale che:

$$|r_j(h\lambda)| < 1 \quad j = 0, \dots, k \quad \forall h \leq h_0$$

Pertanto, condizione necessaria e sufficiente affinché un metodo multistep sia assolutamente stabile, ovvero affinché  $|y_n| \rightarrow 0$  per  $t_n \rightarrow \infty$ , è che esso soddisfi la condizione assoluta delle radici. L'assoluta stabilità implica la zero stabilità, mentre non è vero il viceversa.