# INTEGRAZIONE NUMERICA

LE PROCEDURE NUMERICHE PER APPROSSIMARE L'INTEGRALE DEFINITO:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

DATE DA:

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

SONO NOTE COME FORMULE DI QUADRATURA NUMERICA.
$[a,b]$ E' UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO. GLI $n+1$ PUNTI DISTINTI $x_i$ SONO I NODI E GLI $a_i$ SONO I PESI DELLA QUADRATURA.
IL PROBLEMA E' DETERMINARE $x_i$ ED $a_i$ IN MODO CHE $Q(f) \sim I(f)$ PER UNA AMPIA CLASSE DI FUNZIONI.
SE $p_n(x) \in P_n$ E' UN POLINOMIO INTERPOLANTE LA $f(x)$ IN $x_i$, LA FORMULA:

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) = \int_a^b p_n(x)\,dx$$

SI DICE FORMULA DI QUADRATURA INTERPOLATORIA.
I NODI E I PESI SONO SCELTI IN MODO DA MINIMIZZARE L'ERRORE: $E_n(f) = I(f) - Q_n(f)$. UNA MISURA DI TALE ERRORE E' DATO DAL GRADO DI PRECISIONE. UN MODO PRATICO DI CALCOLARLO E' DETERMINARE UNA CLASSE DI FUNZIONI PER LA QUALE LA FORMULA RISULTI ESATTA. GENERALMENTE TALE CLASSE E' QUELLA DEI POLINOMI PER CUI UNA FORMULA SI DICE ESATTA DI GRADO K ~~SE~~ SE RISULTA ESATTA ~~DI GRADO K~~ PER $\forall p \in P_k$.

UN MODO GENERALE PER COSTRUIRE FORMULE DI QUADRATURA CON GRADO DI PRECISIONE FISSATO E' IL METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI CHE CONSISTE NEL DETERMINARE I NODI E I PESI IMPONENDO CHE LA FORMULA SIA ESATTA PER POLINOMI DEL GRADO DATO DALLA PRECISIONE.

SE I NODI SONO FISSATI, I PESI SI TROVANO RISOLVENDO IL SISTEMA LINEARE:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i^r = \int_a^b x^r dx \qquad 0 \le r \le n$$

SE I NODI NON SONO FISSATI, IL SISTEMA E' NONLINEARE. CIO', COME VEDREMO, DARA' LUOGO ALLE FORMULE COL PIU' ALTO GRADO DI PRECISIONE POSSIBILE.

## FORMULE DI QUADRATURA INTERPOLATORIE

SIANO DATI $x_i \ne x_j$, $i \ne j$, $i,j = 0,..,n$, $n+1$ PUNTI DI INTERPOLAZIONE E COSTRUIAMO IL POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ PER $f(x) \in C[a,b]$ OVVERO TALE CHE: $f(x_j) = p_n(x_j)$, $j=0,..,n$.

$$Q_n(f) \equiv \int_a^b p_n(x)\,dx$$

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_{nj}(x) f(x_j)$$

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj}\, f(x_j)$$

$$a_{nj} = \int_a^b l_{nj}(x)\,dx$$

$$l_{nj} = \frac{W_n(x)}{(x-x_j)\,W_n'(x_j)} \qquad j=0,..,n$$

$$W_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-x_j)$$

OGNI FORMULA DI QUADRATURA INTERPOLATORIA CHE USI $n+1$ NODI HA, PER COSTRUZIONE, GRADO DI PRECISIONE ALMENO $n$. LE FORMULE PIU' NATURALI SONO QUELLE CON I NODI UGUALMENTE SPAZIATI IN $[a,b]$. TALI FORMULE SONO LE FORMULE DI NEWTON-COTES.

SIA: $h = \frac{b-a}{m}$, $x_j = x_0 + j h$, $x_0 = a$, $x_m = b$.

## FORMULA DEL TRAPEZIO

LA FORMULA DI NEWTON-COTES A DUE PUNTI IN CUI: $x_0 = a$, $x_1 = b$ E' DETTA FORMULA DEL TRAPEZIO. RICAVIAMOLA PER IL GENERICO INTERVALLO $[-h, h]$ E POI PER $[a, b]$

$x_0 = -h$, $x_1 = h$. IL POLINOMIO $p_1(x) \in \mathbb{P}_1$ TALE CHE: $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0,1$ E' DATO DA:

$$p_1(x) = f(-h)\frac{h-x}{2h} + f(h)\frac{h+x}{2h}$$

$$\Rightarrow \quad Q_1(f) = I(p_1) = \int_{-h}^{h} p(x)\,dx = h\, f(-h) + h\, f(h).$$

PER RICAVARLO PER $[a,b]$ USIAMO IL METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI.

$$Q_1(f) = \sum_{i=0}^{1} a_i f(x_i) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$$

IMPONIAMO CHE IL GRADO DI PRECISIONE SIA 1 E SIA:

$f(x) = 1, x$

$$\sum_{i=0}^{1} a_i = a_0 + a_1 = \int_a^b 1\,dx = b - a$$

$$\sum_{i=0}^{1} a_i f(x_i) = a\,a_0 + b\,a_1 = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

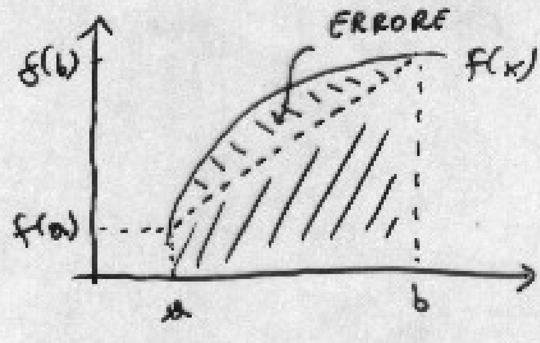
DA CUI:

$$a_0 = a_1 = \frac{b-a}{2}$$

PERTANTO:

$$Q_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

GEOMETRICAMENTE:



PER RICAVARE L'ERRORE RICORDIAMO CHE SE $f \in C^{n+1}[a,b]$ L'ERRORE DELL'INTERPOLAZIONE E':

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

PER CUI: $$e_n = \int_a^b (f(x) - p_n(x))\,dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)\,dx$$

PONENDO: $$M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$$ SI HA:

$$e_n \le M_{n+1} \int_a^b \frac{w(x)}{(n+1)!}\,dx$$

$$e_T = \int_a^b f''(\xi) \frac{(x-a)(x-b)}{2}\,dx$$

APPLICHIAMO ORA IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO SUGLI INTEGRALI PER IL QUALE, SE $g, h \in C[a,b]$ E $g(x)$ NON CAMBIA SEGNO IN $[a,b] \Rightarrow \exists\, \eta \in [a,b]$:

$$\int_a^b g(x) h(x)\,dx = h(\eta) \int_a^b g(x)\,dx$$

PONENDO: $g(x) = (x-a)(x-b)$, $h(x) = f''(\xi_x)$ SI HA:

$$e_T = \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3$$

SI PUO' VERIFICARE CHE IL GRADO DI PRECISIONE E' 1.

# REGOLA DI SIMPSON

LA FORMULA DI NEWTON-COTES A 3 PUNTI E' DETTA REGOLA DI SIMPSON.

PONIAMO: $x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h$ ED IMPONIAMO CHE:

$$Q_2(f) = \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

PER: $f(x) = 1, x, x^2$

$$a_0 + a_1 + a_2 = \int_{-h}^{h} 1\,dx = 2h$$

$$-a_0 h + a_2 h = \int_{-h}^{h} x\,dx = 0$$

$$a_0 h^2 + a_2 h^2 = \int_{-h}^{h} x^2\,dx = \frac{2}{3} h^3$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = a_2 = \frac{h}{3}, \quad a_1 = \frac{4}{3} h$$

$$Q_2(f) = \frac{h}{3}\left[f(-h) + 4f(0) + f(h)\right]$$

E, PER $[a,b]$: $Q_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

SI PUO' FACILMENTE VERIFICARE CHE IL GRADO DI PRECISIONE E' 3 E CIO' E' SFRUTTATO PER DETERMINARE L'ERRORE. INFATTI, POICHE' $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ CAMBIA SEGNO IN $[a,b]$ NON SI PUO' PROCEDERE COME PRIMA. SI DEFINISCE INVECE IL POLINOMIO $p_3(x) \in \mathcal{P}_3$ HERMITIANO CON LE SEGUENTI CONDIZIONI:

$$p_3(a) = f(a),\ p_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ p_3(b) = f(b)$$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

E: $Q_2(f) = I(p_3)$ POICHE' IL GRADO DI PRECISIONE E' 3:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

A CUI PUO' APPLICARSI IL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

DA CUI: $$e_S = \frac{-f^{IV}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

- — -

PER FORMULE DI NEWTON-COTES GENERICHE SI PUÒ FARE USO DEL SEGUENTE:

TEOREMA

SIA $f(x)$ DEFINITA IN $[a,b]$ e $f \in C^{m+2}[a,b]$ E SIANO: $x_i \in [a,b]$, $x_i = x_0 + ih$ $i = 0,..,m$ $m+1$ NODI, $h = \frac{b-a}{m}$ ALLORA:

$m$ PARI: $$E_m = -\frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} h^{m+3} \int_0^m dt \int_0^t t(t-1)\cdots(t-m)\,dt$$

$m$ DISPARI: $$E_m = -\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+2} \left\{ \int_0^{m-1} dt \int_0^t t(t-1)\cdots(t-m)\,dt - \int_{m-1}^{m} t(t-1)\cdots(t-m)\,dt \right\}$$

□

PERTANTO L'ERRORE DELL'INTEGRAZIONE DELLE FORMULE DI N.C. HA ORDINE $2m+1$ SE I NODI SONO $m+1$, MENTRE SI PUÒ FARE VEDERE CHE LA PRECISIONE DIPENDE DA $m$. IN PARTICOLARE SE: $m$ DISPARI PRECISIONE $m$

$m$ PARI PRECISIONE $m+1$

ESEMPI

TRAPEZIO: 2 NODI $\Rightarrow m=1$ $e \propto h^3$, PREC. = 1

SIMPSON: 3 NODI $\Rightarrow m=2$ $e \propto h^5$, PREC. = 3

GENERALE: $m+1$ NODI $e \propto h^{2m+1}$, PREC. $\begin{cases} m & \text{DISP.} \\ m+1 & \text{PARI} \end{cases}$

PER AUMENTARE LA PRECISIONE SI HANNO 2 ALTERNATIVE:

i) AUMENTARE # NODI IN MODO CHE $Q_n(f)$ SIA INTEGRALE DI UN POLINOMIO INTERPOLANTE DI ALTO GRADO: QUADRATURE GAUSSIANE

ii) SI DIVIDE $[a,b]$ IN SOTTOINTERVALLI, IN ESSI SI USANO FORMULE DI BASSA PRECISIONE, SI SOMMANO I RISULTATI: REGOLE DI QUADRATURA COMPOSTE.

REGOLE DI QUADRATURA COMPOSTE

SUDDIVIDIAMO $[a,b]$ IN $m$ INTERVALLINI:

$$Q_m(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

E USIAMO IN $[x_j, x_{j+1}]$ LA REGOLA DEL TRAPEZIO.

SIA: $h = \frac{b-a}{m}$, $x_j = a + jh$, $j = 0,..,m$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_j) + f(x_{j+1})] - \frac{f''(\eta_j)}{12} h^3$$

SOMMANDO SI HA: $T_m(f) = h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_m)) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f''(\eta_j)}{12} h^3$

PER SEMPLIFICARE L'ESPRESSIONE DELL'ERRORE USIAMO IL:

LEMMA SIA $g(x) \in C[a,b]$ E $\{a_j\}_{j=0}^{m-1}$, $a_j \in \mathbb{R}$ TUTTE DELLO STESSO SEGNO. $x_j \in [a,b]$, $j = 0,..,m-1$ $\Rightarrow \exists \eta \in [a,b]$:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_j g(x_j) = g(\eta) \sum_{j=0}^{m-1} a_j$$

$\square$

IDENTIFICANDO $f''(\eta)$ CON $g(x)$ E $a_j$ CON $-\frac{h^3}{12}$ SI HA:

$$e_n^T = -f''(\eta) \sum_j \left(\frac{h^3}{12}\right) = -f''(\eta)\, m \frac{h^3}{12} = -f''(\eta)\, \frac{h^2(b-a)}{12}$$

E PONENDO $\sum''$ LA SOMMATORIA DIMEZZATA AGLI ESTREMI SI HA:

$$T_m(f) = h \sum_{j=0}^{m}{}'' f(x_j) - f''(\eta) \frac{h^2(b-a)}{12}$$

---

NELLE FORMULE DI N.C. IL CALCOLO DEI PESI E' INDIPENDENTE DALLA SPAZIATURA $h$ ED ESSI POSSONO ESSERE QUINDI TABULATI.

SI PUO' VEDERE CHE, PER $m$ GRANDE, I PESI AUMENTANO IN MODULO MENTRE IL SEGNO VARIA. CIO' RENDE INSTABILI TALI FORMULE DAL PUNTO DI VISTA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI, INOLTRE UN AUMENTO DEL GRADO DI PRECISIONE, OVVERO DEI NODI DELLA QUADRATURA NON IMPLICA NECESSARIAMENTE LA CONVERGENZA DELLA QUADRATURA

ALL'INTEGRALE QUANDO LA FUNZIONE NON E' POLINOMIALE. IL SEGUENTE TEOREMA MOSTRA SOTTO QUALI CONDIZIONI L'AUMENTO DEI PUNTI DI INTERPOLAZIONE PORTI ALLA CONVERGENZA DELLA QUADRATURA ALL'INTEGRALE.

TEOREMA SIA $f \in C[a,b]$, $Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$ DOVE $a_j^{(n)}, x_j^{(n)}$ SONO I PESI E I NODI DELLA QUADRATURA INTERPOLATORIA DIPENDENTI DA $n$. SE $\exists K > 0 : \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(n)}| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} Q_n(f) = I(f) \quad \forall f \in C[a,b]$$

DIM.

PER WEIERSTRASS $\forall \varepsilon > 0 \ \exists q_N(x) \in \mathbb{P}_N \ (N = f(\varepsilon))$:

$$\| f - q_N \|_\infty \leq \varepsilon$$

POICHE' LA QUADRATURA E' INTERPOLATORIA:

$$Q_n(q_N) = I(q_N) \qquad n \geq N$$

SCEGLIENDO $n \geq N$ SI HA:

$$|I(f) - Q_n(f)| = |I(f) - I(q_N) + Q_n(q_N) - Q_n(f)| \leq$$

$$\leq |I(f) - I(q_N)| + |Q_n(q_N) - Q_n(f)|$$

$$|I(f) - I(q_N)| \leq \|f - q_N\|_\infty (b-a)$$

$$|Q_n(q_N) - Q_n(f)| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)} [q_N(x_j^{(n)}) - f(x_j^{(n)})] \right| \leq$$

$$\leq \|f - q_N\|_\infty \sum_{j=0}^{n} |a_j^{(n)}| \leq K \varepsilon$$

$$\Rightarrow |I(f) - Q_n(f)| \leq (K + (b-a))\varepsilon = \bar{\varepsilon} \qquad \blacksquare$$

SI PUO' PROVARE CHE E' VERO IL VICEVERSA.

SE GLI $a_j^{(n)}$ SONO TUTTI $>0$ LA CONVERGENZA E' GARANTITA. INFATTI, POICHE' IL POLINOMIO $p_0(x)=1$ E' INTEGRATO ESATTAMENTE, SI HA:

$$0 < I(1) = \int_a^b dx = Q_n(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)}$$

QUINDI, SE TUTTI I PESI SONO POSITIVI:

$$\sum_{j=0}^{n} |a_j^{(n)}| = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(n)} = \int_a^b dx$$

UN VANTAGGIO DELLE FORMULE CON PESI POSITIVI E' CHE HANNO BUONE PROPRIETA' DI ARROTONDAMENTO, POICHE' GLI ERRORI TENDONO A CANCELLARSI. INOLTRE L'ERRORE E' MINIMIZZATO SE I PESI SONO QUASI UGUALI. UN'IDEA E' QUINDI QUELLA DI DETERMINARE FORMULE CON PESI UGUALI E NODI FISSATI, IMPONENDO UN GRADO DI PRECISIONE DATO. UN'ALTRA POSSIBILITA' E' DATA DALLE FORMULE DI QUADRATURA GAUSSIANE IN CUI SIA I NODI CHE I PESI SONO INDETERMINATI.