INTERPOLAZIONE

E' UN PROBLEMA DI APPROSSIMAZIONE.
SI USA QUANDO I DATI SONO NOTI CON PRECISIONE
SCELTA DI UNA CLASSE DI FUNZIONI DI DIMENSIONE FINITA. LA FUNZIONE INTERPOLANTE E QUELLA INTERPOLATA DEVONO COINCIDERE NEI NODI.

PROBLEMI: ESISTENZA, UNICITA', ACCURATEZZA, STABILITA'.

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$\mathcal{P}_n = \{$ polinomi di grado $\leq n \}$

TEOREMA 1 (esistenza ed unicità).

DATI $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i,j = 0, \ldots, n$
$y_0, \ldots, y_n \Rightarrow \exists_1 \, p \in \mathcal{P}_n$:

$$p(x_i) = y_i \qquad i = 0, \ldots, n$$

Dim.

$V = [v_{ij}]$, $v_{ij} = x_i^j$ $\quad i,j = 0, \ldots, n$

$$Va = y \qquad y = [y_0, \ldots, y_n]^T$$
$$\Updownarrow$$
$$p(x_i) = y_i$$

$$\det V = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0 \qquad \blacksquare$$

V = matrice di Vandermonde.

ALTRA DIMOSTRAZIONE: RAPPRESENTAZIONE ESPLICITA DELLA SOLUZIONE PER Y GENERICO, MEDIANTE UNA OPPORTUNA BASE.

SIANO:

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}} \qquad i=0,\dots,n$$

$L_i(x)$: POLINOMI DI INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE.

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad i,j=0,\dots,n$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

L_i lin. indip.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)}$$

CHE DA' LA RAPPRESENTAZIONE LAGRANGIANA DI $p(x)$

DIMOSTRIAMO NEL CASO SPECIALE PER CUI:

$$y_i = 1, \quad y_j = 0 \quad j\neq i \quad \text{PER QUALCHE } 0\leq i \leq n$$

CERCHIAMO UN POLINOMIO DI GRADO $\leq n$ CON GLI n ZERI x_j, $j\neq i$:

$$p(x) = c(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$$

PER QUALCHE c.

IL FATTO CHE $p(x_i) = 1$ IMPLICA CHE:

$$c = [(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)]^{-1}$$

CHE CI DA' $L_i(x)$.

DIMOSTRIAMO L'UNICITA'.

SIA $q(x)$ TALE CHE:

$$q(x_i) = f(x_i)$$

$$r(x) = p(x) - q(x)$$

$$r \in \mathcal{P}_n: \quad r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

r HA $n+1$ ZERI $\Rightarrow r(x) \equiv 0$

ESEMPIO

$p(x) \in \mathcal{P}_2$ INTERPOLANTE I DATI:

$$(0, -1), (1, 2), (2, 7)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}, \quad L_1(x) = -x(x-2), \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$p(x) = -L_0(x) + 2L_1(x) + 7L_2(x) = x^2 + 2x - 1$$

METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{vmatrix}$$

L'ESEMPIO PRECEDENTE DA':

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{vmatrix} \Rightarrow p(x) = x^2 + 2x - 1$$

DIFFERENZE DIVISE DI NEWTON

ALTRO MODO PER TROVARE IL POLINOMIO INTERPOLATORIO PIU' COMODO SE SI DEVE AGGIUNGERE UN DATO NUOVO.

SCRIVIAMO $p(x)$ NELLA SEGUENTE FORMA:

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

$b_0 = f(x_0)$
$b_1 = f[x_0, x_1]$
$\vdots$
$b_n = f[x_0, \dots, x_n]$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

TABELLA

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & - \; - & \\
 & & f[x_1, x_2] & & & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
 & & f[x_2, x_3] & & & \\
x_3 & f(x_3) & & & & \\
\vdots & \vdots & & f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] & & \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

DIFFERENZE DIVISE NEL CASO DI NODI UGUALMENTE SPAZIATI

$$x_i = x_0 + ih \,, \quad h = \frac{b-a}{n} \,, \quad i = 0,..,n$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \,, \quad f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$$

$$\Delta f(x) \doteq f(x+h) - f(x)$$
$$\Delta^0 f(x) \doteq f(x)$$
$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f[x_i,..,x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k f(x)}{k!\, h^k} \\ p(x) = p(x_0 + rh) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \Delta^j f(x_0) \binom{r}{j} \end{array}} \quad r \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

ESEMPIO CALCOLARE $f(x) = \cos x$ PER $x = 0.44$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0.3	0.955336	−0.034275		
			−0.009203	
0.4	0.921061	−0.043478		0.000434
			−0.008769	
0.5	0.877583	−0.052247		
0.6	0.825336			

$$p(x) = 0.955336 - 0.034275 \binom{r}{1} - 0.009203 \binom{r}{2} + \\ + 0.000434 \binom{r}{3}$$

$$0.44 = 0.3 + \overset{r \cdot 0.1}{\cancel{1.4\, h}} \Rightarrow r = 1.4$$

$$\Rightarrow p(0.44) = 0.904750$$

$(*)$ $\binom{r}{j} = \dfrac{r(r-1)\,..\,(r-(j-1))}{}$

ERRORE DELL'INTERPOLAZIONE LAGRANGIANA

TEOREMA SIA $f \in C^{m+1}[a,b]$, $x_0, .., x_m$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

$p \in P_m$ INTERPOLI f in x_i.

$$\Rightarrow e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!} w(x)$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^{m} (x - x_i) \quad , \quad \xi \in]a,b[$$

Dim.

SIA $x \in [a,b]$ FISSATO E $x \neq x_i$, $i = 0, m$ ALTRIMENTI IL TEOREMA E' BANALMENTE VERO. SIA:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

$F(t)$ HA $m+2$ ZERI: $F(x) = F(x_0) = \dots = F(x_m) = 0$ ED E' $m+1$ VOLTE DIFFERENZIABILE. ALLORA PER IL TEOREMA DI ROLLE ~~SEGUE~~ $F'(t)$ HA $m+1$ ZERI, $F''(t)$ HA m ZERI ED ITERANDO, $F^{(m+1)}(t)$ HA ALMENO UNO ZERO IN $]a,b[$. SIA ESSO ξ. ALLORA:

$$F^{(m+1)}(\xi) = 0 = f^{(m+1)}(\xi) - 0 - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} (m+1)!$$

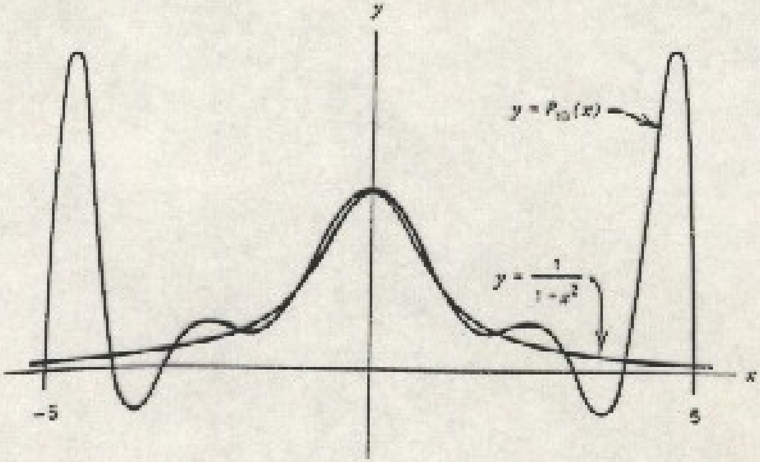
DA CUI LA TESI ∎

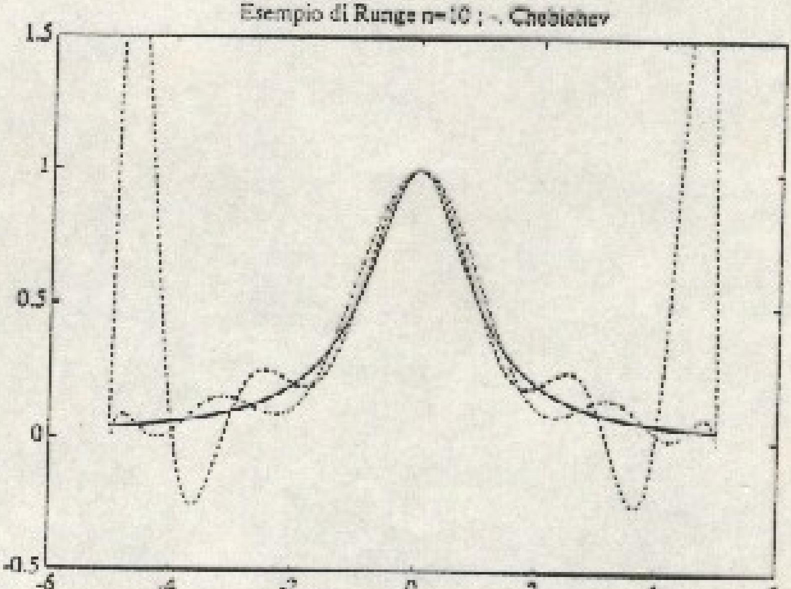
DA TALE TEOREMA E DALLE FORMULE DELLE DIFFERENZE DIVISE DI NEWTON SI HA:

$$f[x_0, .., x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

INFATTI:

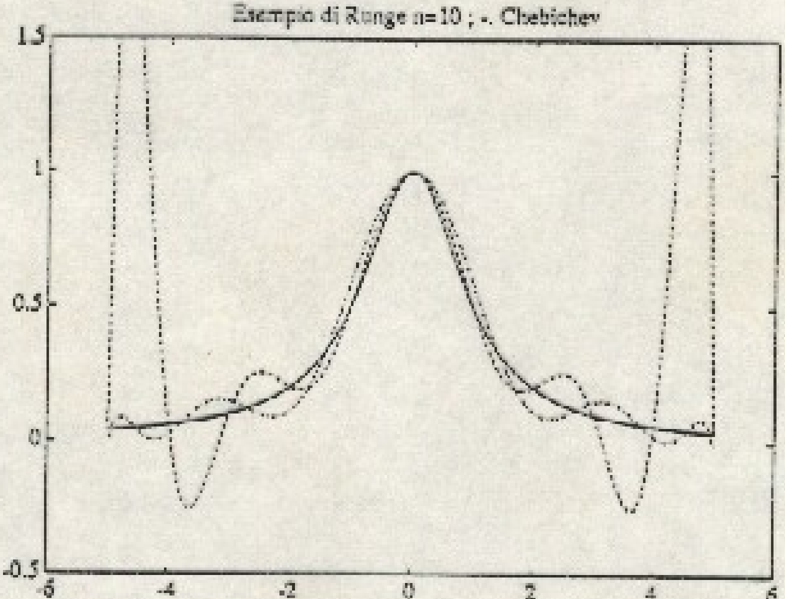
SIA $t \in \mathbb{R}$: $t \neq x_i$, $i = 0, .., m$. COSTRUIAMO IL POLINOMIO INTERPOLANTE $f(x)$ IN $x_0, .., x_m, t$:



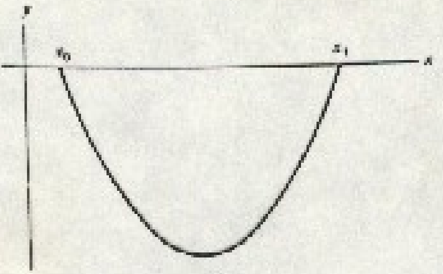


.... Chebichev

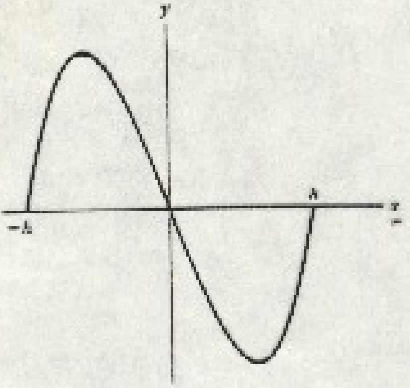
---- P_{10} punti ugualmente spaziati



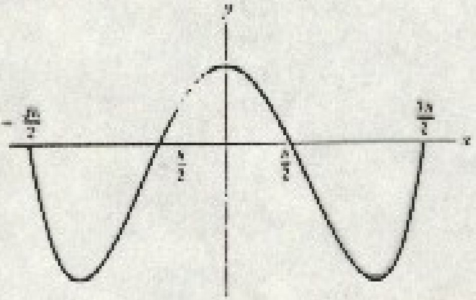
$a = 5$



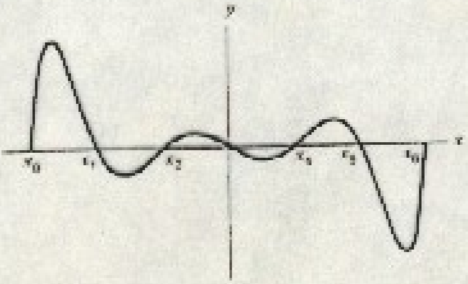
p2



p3



p4



p7

$$p_{m+1}(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x-x_0)\cdots(x-x_m) f[x_0, \dots, x_m, t] =$$
$$= p_m(x) + (x-x_0)\cdots(x-x_m) f[x_0, \dots, x_m, t]$$

POICHE': $p_{m+1}(t) = f(t)$ SIA $x = t$, ALLORA SI HA:

$$f(t) - p_m(t) = (t-x_0)\cdots(t-x_m) f[x_0, \dots, x_m, t]$$

DA CUI: $$f[x_0, \dots, x_m, t] = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}$$

PONIAMO: $t = x_{m+1}$, $m = m+1$

$$f[x_0, \dots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \qquad \blacksquare$$

INTERPOLAZIONE DI HERMITE

CI SI CHIEDE SE CONOSCENDO IL VALORE DELLE DERIVATE DI $f(x)$ IN ALCUNI NODI SIA POSSIBILE RAGGIUNGERE UNA MAGGIORE ACCURATEZZA.

SE IN x_0 CONOSCESSIMO $f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)$ CIOE' TUTTE LE DERIVATE DI $f(x)$ FINO AD m LA SOLUZIONE DI TROVARE $p(x) \in \mathbb{P}_m$: $p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ $j = 0, \dots, m$ AVREBBE SOL. UNICA. INFATTI IL SISTEMA:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_m x_0^m &= f(x_0) \\
a_1 + 2a_2 x_0 + \dots + m a_m x_0^{m-1} &= f'(x_0) \\
&\;\vdots \\
m!\, a_m &= f^{(m)}(x_0)
\end{aligned}$$

HA LA MATRICE DEI COEFFICIENTI TRIANGOLARE SUPERIORE CON ELEMENTI DIAGONALI TUTTI POSITIVI. PERTANTO IL SUO DETERMINANTE E' DIVERSO DA ZERO E IL PROBLEMA HA SOL. UNICA.

IN GENERALE IL PROBLEMA NON HA PERO' SOL. UNICA. CIOE' ASSEGNATE IN ALCUNI NODI IL VALORE DI ALCUNE DERIVATE NON SEMPRE C'E' UN'UNICO POLINOMIO INTERPOLANTE CHE ABBIA IN TALI NODI IL VALORE DATO DELLE DERIVATE.

ES.: TROVARE $p(x) \in \mathbb{P}_2$: $p(-1) = y_1$, $p'(0) = y_2$, $p(1) = y_3$

DA':

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a - b + c = y_1 \\ b = y_2 \\ a + b + c = y_3 \end{cases} \qquad \det \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

E QUINDI LA SOL. NON E' UNICA.

INVECE, IL PROBLEMA: DATI $m+1$ PUNTI, $x_0, \dots, x_m$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

TROVARE $p(x) \in \mathbb{P}_N$: $\quad N = m + \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m$

CHE ASSUMA I SEGUENTI VALORI:

$$f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(\alpha_0)}(x_0)$$
$$\vdots$$
$$f(x_m), f'(x_m), \dots, f^{(\alpha_m)}(x_m)$$

HA SOL. UNICA ED IL POLINOMIO INTERPOLANTE E' DETTO DI HERMITE. SE: $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 1$ L'INTERPOLAZIONE E' DETTA OSCULATORIA.

SI HANNO I SEGUENTI TEOREMI:

TEOREMA DATI $x_0, \dots, x_m$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ $\in [a,b]$ E: $f(x_i)$, $f'(x_i)$ $i = 0, \dots, m$ $\Rightarrow$ $\exists_1\, p(x) \in \mathbb{P}_{2m+1}$: $\quad p(x_i) = f(x_i)$

$$p'(x_i) = f'(x_i) \quad i = 0, \dots, m$$

$\square$

ANALOGAMENTE AL TEOREMA SULL'ERRORE DELL'INTERPOLAZIONE LAGRANGIANA SI HA:

TEOREMA SIA $f \in C^{(2n+2)}[a,b]$, $p(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}$ IL POLINOMIO DI HERMITE OSCULATORIO INTERPOLANTE $f(x)$ IN $x_0, \dots, x_n$ DISTINTI $\in [a,b]$. $\Rightarrow$

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\,[w(x)]^2$$

DIM.

E' SIMILE AL TEOREMA DELL'INTERP. LAGRANGIANA PONENDO:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{[w(x)]^2}\,[w(t)]^2$$

I POLINOMI SONO DI FACILE COSTRUZIONE E LA LORO UTILITA' SI BASA SUL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.

TEOREMA SIA $f \in C[a,b]$. ESSA E' ALLORA APPROSSIMABILE UNIFORMEMENTE DA UN POLINOMIO IL CUI GRADO DIPENDE DALL'ACCURATEZZA SCELTA. CIOE':

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n = n(\varepsilon),\ p(x) \in \mathcal{P}_n : \ \|f - p\|_\infty \le \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$(\ |f(x) - p(x)| \le \varepsilon \ \ \forall x \in [a,b]\ )$$

$\square$

SI HA INOLTRE:

TEOREMA SIA $f \in C[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ FISSATO

$$\Rightarrow \exists_1\, p^* \in \mathcal{P}_n : \ \|f - p^*\| \le \|f - p\| \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$$

IN UNA DELLE NORME $1, 2, \infty$.

CI POSSONO PERO' ESSERE DIFFICOLTA' ASSOCIATE ALL'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE. PER ILLUSTRARE CIO', SIA Δ UNA SUDDIVISIONE TRIANGOLARE DEL GENERICO INTERVALLO $[a,b]$ DEFINITA DA:

$$
\begin{array}{llll}
t_{00} & & & \\
t_{10} & t_{11} & & \\
t_{20} & t_{21} & t_{22} & \ddots \\
\vdots & & & \ddots \\
t_{n0} & t_{n1} \cdots & & \cdots t_{nn}
\end{array}
$$

CON: $a \le t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} \le b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

SIA $\{p_n(x)\}$ UNA SUCCESSIONE DI POLINOMI GENERATI DALLA INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE PER $f(x)$ NEI t_{ni} $i=0,..,n$.

SI HA:

TEOREMA [DI FABER]

PER $\forall \Delta$ $\exists f \in C[a,b]$ PER CUI $\{p_n(x)\}$ NON CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$. $\square$

D'ALTRONDE SI HA:

TEOREMA

DATA $f \in C[a,b]$ $\exists \Delta$: $\{p_n(x)\}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $f(x)$. $\square$

DA TALI TEOREMI SI DEDUCE CHE $\nexists$ SCHEMI INTERPOLATORI UNIVERSALI.

ESEMPIO DI RUNGE

STABILITA'

ANALIZZIAMO IL PROBLEMA DELLA STABILITA' DEGLI SCHEMI INTERPOLATORI OVVERO DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI SUI DATI AL POLINOMIO DI INTERPOLAZIONE. DALLA RAPPRESENTAZIONE DI LAGRANGE SI HA, INDICANDO CON $\tilde{y}_i$ I DATI PERTURBATI E CON y_i QUELLI NON PERTURBATI:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} L_i(x) y_i$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} L_i(x) \tilde{y}_i$$

DA CUI:

$$p(x) - \tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{m} L_i(x)(y_i - \tilde{y}_i)$$

$$|p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \lambda_m(x) \max_{0 \leq i \leq m} |y_i - \tilde{y}_i|$$

$$\|p - \tilde{p}\|_\infty \leq \Lambda_m \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

DOVE:

$\lambda_m(x) = \sum_{i=0}^{m} |L_i(x)|$, $\Lambda_m = \|\lambda_m\|_\infty$ NOTE COME FUNZIONE E COSTANTE DI LEBESGUE. TANTO PIU' SONO PICCOLE TANTO MAGGIORE E' LA STABILITA' DEL PROBLEMA.

SI PUO' VEDERE CHE SE I NODI SONO GLI ZERI DEI POLINOMI DI CHEBICHEV LA FUNZIONE $\lambda_m(x)$ HA UN ANDAMENTO VICINO A QUELLO OTTIMALE. RICORDANDO POI IL TEOREMA SULL'ERRORE DI LAGRANGE SI VEDE CHE PER MIGLIORARE L'ERRORE SI DEVONO SCEGLIERE GLI x_i IN MODO DA MINIMIZZARE $\max_{x \in [a,b]} W(x)$. SE $[a,b] \equiv [-1,1]$ TALE SCELTA DEGLI x_i E' DATA ANCORA DAGLI ZERI DEI POLINOMI DI CHEBICHEV.

POLINOMI DI CHEBICHEV

POLINOMIO DI CHEBICHEV DI 1ª SPECIE:

$$T_m(x) = \cos(m\vartheta) \quad m \in \mathbb{N}$$
$$x = \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad T_m(x) = \cos(m \arccos x) \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$T_m(x) \in \mathbb{P}_m$ ED E' QUINDI DEFINITO PER $\forall x \in \mathbb{R}$. INFATTI:

$$\cos((k+1)\vartheta) = \cos k\vartheta \cos\vartheta - \sin k\vartheta \sin\vartheta$$
$$\cos((k-1)\vartheta) = \cos k\vartheta \cos\vartheta + \sin k\vartheta \sin\vartheta$$
$$\cos((k+1)\vartheta) + \cos((k-1)\vartheta) = 2\cos k\vartheta \cos\vartheta$$

DA CUI SI HA LA RELAZIONE DI RICORRENZA:

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

CON: $T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x.$

PERTANTO: $T_2(x) = 2x^2 - 1, \; T_3(x) = 4x^3 - 3x, \; T_4(x) = 8x^4 - 8x^3 + 1 \; \ldots$

IL COEFFICIENTE DI x^k IN $T_k(x)$ E': 2^{k-1}. GLI ZERI DI $T_k(x)$ SONO DATI DA:

$$\cos(k\vartheta_i) = 0, \quad k\vartheta_i = \frac{\pi}{2} + i\pi, \quad \vartheta_i = \frac{2i+1}{2k}\pi$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) \quad i = 0, \ldots, k-1$$

POICHE' $T_k(x) \in \mathbb{P}_k$ GLI ZERI TROVATI SONO I SOLI ZERI DI $T_k(x)$ ED ESSI SONO DISTINTI. I PUNTI DI $[-1, 1]$ IN CUI $|T_k(x)| = 1$ SONO DI ESTREMO RELATIVO E SONO DATI DA:

$$\cos(i\pi) = (-1)^i \Rightarrow \phi_i = \frac{i\pi}{k} \quad i = 0, \ldots, k.$$

SI HA: $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$.

SI HA INOLTRE:
$$T'_k(x) = \frac{-k \sin k\vartheta}{-\sin\vartheta} = k\frac{\sin k\vartheta}{\sin\vartheta}$$

IL POLINOMIO $U_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}$:
$$U_{k-1} = \frac{T'_k(x)}{k} = \frac{\sin k\vartheta}{\sin\vartheta}$$

E' IL POLINOMIO DI CHEBICHEV DI 2ª SPECIE.

I POLINOMI DI CHEBICHEV SONO ORTOGONALI RISPETTO AL PRODOTTO INTERNO:
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

DIMOSTRIAMO ADESSO CHE PEL' INTERVALLO $[-1, 1]$, LA $w(x) = \prod_{i=0}^{m}(x-x_i)$ HA $\|w\|_\infty$ MINIMA SE GLI x_i SONO GLI ZERI DEI POLINOMI DI C.

TEOREMA

$w(x) = \prod_{i=0}^{m}(x-x_i) \in \mathcal{P}_{m+1}$. TRA LE POSSIBILI SCELTE DEI NODI $\{x_i\}_{i=0}^{m}$, $x_i \in [-1, 1]$, $\|w\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |w(x)|$ E' MINIMA SE:
$$w(x) = \frac{T_{m+1}}{2^m}$$ CIOE' GLI x_i SONO GLI ZERI DI $T_{m+1}(x)$.

Dim.

$T_{m+1}(x)$ HA IL COEFF DI x^{m+1} DATO DA 2^m. ALLORA:

$\frac{T_{m+1}(x)}{2^m}$ E' UN CANDIDATO PER IL MINIMO DI $w(x)$ TRA TUTTI I POLINOMI DEL TIPO: $x^{m+1} + \dots$. PONIAMO QUINDI:
$$w(x) = \frac{T_{m+1}}{2^m} = (x-x_0)\cdots(x-x_m) \quad \text{CON:}$$
$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2(m+1)}\pi$$

SI HA: $\|W\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ POICHE' $\|T_{n+1}\|_\infty = 1$ SE $x \in [-1,1]$

SE $y_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}$ $i = 0, .., n+1$ SI HA:

$$W(y_i) = (-1)^i \frac{1}{2^n} \quad , \quad W(y_{i+1}) = -W(y_i).$$

SUPPONIAMO CHE $\exists\, V(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$ CON COEFF. DI x^{n+1} UGUALE AD 1 E TALE CHE: $\|V\|_\infty < \|W\|_\infty$.

SE i PARI : $V(y_i) < W(y_i)$

SE i DISPARI : $V(y_i) > W(y_i)$

PERTANTO: $V(y_0) < W(y_0)$, $V(y_1) > W(y_1)$ ...

DEFINENDO : $H(x) = V(x) - W(x)$ SI HA : $H(x) \in \mathcal{P}_n$ POICHE' V E W HANNO LO STESSO x^{n+1}. MA $H(x)$ HA $n+1$ ZERI IL CHE E' ASSURDO. DA CIO' LA TESI. ■

SPLINES

NELL'INTERPOLAZIONE POLINOMIALE, LA CONOSCENZA DEI VALORI DELLA $f(x)$ DA INTERPOLARE IN $m+1$ NODI DA' UN POLINOMIO DI GRADO m CHE, ALL'AUMENTO DI m, HA UN COMPORTAMENTO OSCILLATORIO. CIO' PUO' DARE PROBLEMI SE LA FUNZIONE DA APPROSSIMARE E' "PIATTA" O SE SI DEVE APPROSSIMARE LA $f'(x)$.

DUE DIVERSE STRATEGIE: i) POLINOMIO DI BASSO GRADO CHE APPROSSIMI MA NON INTERPOLI LA $f(x)$: MINIMI QUADRATI, MINMAX; ii) POLINOMI DI BASSO GRADO INTERPOLANTI LA $f(x)$ IN SOTTOINTERVALLI. TALI ULTIMI POLINOMI SONO NOTI COME POLINOMI A TRATTI.

UN POLINOMIO DI GRADO K A TRATTI E' UNA ~~POLINOMIO~~ FUNZIONE CHE IN OGNI SOTTOINTERVALLO E' UN POLINOMIO DI GRADO K. TALI POLINOMI SONO UNITI IN MODO CONTINUO IN MODO DA INTERPOLARE I DATI. CIO' COMPORTA CHE LA FUNZIONE POLINOMIALE APPROSSIMANTE LA $f(x)$ ABBIA DERIVATE DISCONTINUE. SE SI CONOSCESSERO LE $f'(x)$ NEI NODI SI POTREBBE USARE HERMITE MA CIO' AUMENTEREBBE LA COMPLESSITA' DEL PROBLEMA. E' INVECE POSSIBILE IMPORRE ALCUNE PROPRIETA' DI CONTINUITA' ALLE DERIVATE SENZA RICHIEDERE LA CONOSCENZA DI TALI DERIVATE. DI PARTICOLARE INTERESSE E' IL CASO IN CUI LE DERIVATE SONO CONTINUE FINO ALL'ORDINE K-1 SE K E' IL GRADO DEL POLINOMIO A TRATTI INTERPOLANTE.

UN POLINOMIO DI GRADO K A TRATTI CHE HA DERIVATE CONTINUE FINO A K-1 E' DETTA SPLINE DI GRADO K.

LE PROPRIETA' DI UNA SPLINE DI GRADO K INTERPOLANTE UNA $f(x)$ SONO:

1) $S(x_i) = f_i \quad i = 0, .., m$

2) $S(x) \in C^{(k-1)}[a,b]$

3) $S(x) \in \mathbb{P}_k$ in $\forall [x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, .., m-1$

SE K E' IL GRADO DELLA SPLINE ED $m+1$ E' IL NUMERO DEI NODI, PER DETERMINARE UNIVOCAMENTE LA SPLINE DOBBIAMO IMPORRE $m+k$ CONDIZIONI. TALE NUMERO E' NOTO COME # DI GRADI DI LIBERTA' (d.o.f. ≡ degree of freedom):

$$d.o.f. = m + K.$$

NEL CASO INTERPOLAT.: d.o.f. = $k-1$

GENERALMENTE LE SPLINES PIU' USATE SONO QUELLE LINEARI E QUELLE CUBICHE.

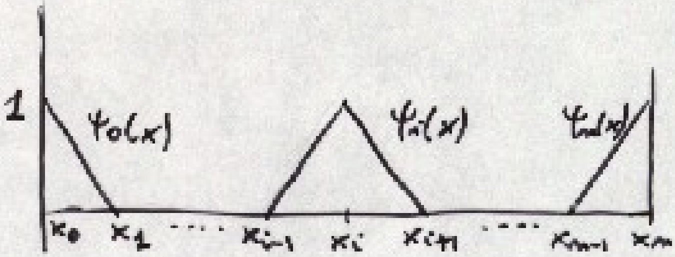
SPLINES LINEARI

IN TAL CASO $K = 1 \Rightarrow$ d.o.f. $= m+1$. IN TAL CASO L'ESISTENZA E L'UNICITA' DELLA FUNZIONE SPLINE SONO OVVIE E RISULTANO DAL PROCEDIMENTO DI COSTRUZIONE DI UNA PARTICOLARE BASE.

DEFINIAMO LE FUNZIONI CAPPELLO φ_i, $i = 1, .., m-1$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

E: $\varphi_0(x) = \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$, $x \in [x_0, x_1]$, $\varphi_m(x) = \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}$, $x \in [x_{m-1}, x_m]$



POICHE' $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ LE φ_i SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

PERTANTO:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

E SE LA SPLINE $S(x)$ INTERPOLA LA $f(x)$ IN $f(x_i) = y_i$ $i=0,..,n$

SI HA:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x)$$

PER STIMARE L'ERRORE SI UTILIZZANO I RISULTATI PER I POLINOMI INTERPOLANTI. SIA: $h_i = x_i - x_{i-1}$ E SIA $f \in C^2[a,b]$:

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \left(\frac{h_i}{2}\right)^2 \max_{h_{i-1} \leq t \leq h_i} \left|\frac{f''(t)}{2}\right|$$

PONENDO: $h = \max h_i$ SI HA:

$$\| f - S_1 \|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \| f'' \|_\infty$$

PER $h \to 0$ $e(x) \to 0$.

SPLINES CUBICHE

IN QUESTO CASO d.o.f. $= m+3$. IMPONENDO LE CONDIZIONI DI INTERPOLAZIONE SI HANNO $m+1$ CONDIZIONI E RESTANO DUE GRADI DI LIBERTA'. A SECONDA DELLA LORO SCELTA SI HANNO:

SPLINE NATURALE : $S_3''(x_0) = S_3''(x_m) = 0$

SPLINE PERIODICA : $S_3'(x_0) = S_3'(x_m)$

$S_3''(x_0) = S_3''(x_m)$

SPLINE VINCOLATA : $S_3'(x_0) = y_0'$, $S_3'(x_m) = y_m'$

INDICHIAMO PER BREVITA' LA SPLINE CUBICA CON $C(x)$.

DIMOSTRIAMO CHE LA SCELTA:

$$C(x_i) = f_i$$

$$C''(x_0) = s_0$$

$$C''(x_m) = s_m$$

DA' UN'UNICA SPLINE. LA PARTICOLARE SCELTA $s_0 = s_m = 0$ DA' POI LA SPLINE NATURALE.

SUPPONIAMO DI SCEGLIERE $s_0, \dots, s_m$, $s_i = C''(x_i)$ E SIA COSTRUIAMO LA RETTA PASSANTE PER:

$$(x_i, s_i) , (x_{i+1}, s_{i+1})$$

$$C''_i(x) = s_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + s_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} , \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, \dots, m-1$$

NOTIAMO CHE: $C''_{i+1}(x_{i+1}) = C''_i(x_{i+1})$ $i = 0, \dots, m-2$ E QUINDI $C''(x)$ E' CONTINUA. INTEGRANDO DUE VOLTE SI HA:

$$C_i(x) = s_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + s_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + c_i(x-x_i) + d_i(x_{i+1}-x)$$

CON c_i, d_i COSTANTI DI INTEGRAZIONE.

SCEGLIAMO c_i E d_i IN MODO CHE $C(x)$ SIA CONTINUA ED INTERPOLI LA $f(x)$.

$$C_i(x_i) = f_i, \quad C_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Allora $c_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - s_{i+1}\frac{h_i}{6}$, $d_i = \frac{f_i}{h_i} - s_i \frac{h_i}{6}$

$$\Rightarrow \quad C_i(x) = s_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + s_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - s_{i+1}\frac{h_i}{6}\right)(x-x_i) + \left(\frac{f_i}{h_i} - s_i\frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1}-x)$$

IMPONIAMO LA CONTINUITA' DI $C'(x)$ CIOE':

$$C_i'(x_i) = C_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$C_i'(x) = -s_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + s_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + \frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(s_{i+1}-s_i) \qquad (1)$$

DA CUI:

$$h_{i-1}s_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})s_i + h_i s_{i+1} = b_i$$

DOVE: $$b_i = 6\left(\frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \qquad i = 1, \dots, n-1$$

POICHE' s_0 ED s_n SONO DATE SI HA UN SISTEMA DI $n-1$ EQS. IN $n-1$ INCOGNITE. IL SISTEMA E' TRIDIAGONALE E DIAGONALMENTE DOMINANTE. PERTANTO HA SOL. UNICA.

ANALOGAMENTE, SE SI IMPONE CHE:

$$C'(x_0) = y'_0 \,, \quad C'(x_n) = y'_n$$ DALLA (1) SI HA:

$$C'_{n-1}(x_n) = s_n \frac{h_{n-1}}{2} + \frac{\Delta f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(s_n - s_{n-1}) = y'_n$$

$$\Rightarrow \quad 2h_{n-1} s_n + h_{n-1} s_{n-1} = 6\left(y'_n - \frac{\Delta f_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \qquad (2)$$

$$C'_0(x_0) = -s_0 \frac{h_0}{2} + \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(s_1 - s_0) = y'_0$$

$$\Rightarrow \quad 2h_0 s_0 + h_0 s_1 = 6\left(\frac{\Delta f_0}{h_0} - y'_0 \right) \qquad (3)$$

LE (1), (2) E (3) FORMANO UN SISTEMA DI $n+1$ EQS. IN $n+1$ INCOGNITE TRIDIAGONALE DIAG. DOMINANTE E QUINDI HA SOL. UNICA.