# SISTEMI LINEARI

SISTEMA DI $m$ EQS. IN $n$ INCOGNITE:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i} \qquad i = 1, .., m$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad (1)$$

$$\boxed{Ax = b}$$

SOLUZIONE DEL SISTEMA: $n$-upla che SODDISFI TALI EQS. TRATTIAMO SOLO SISTEMI QUADRATI $m=n$ IN CUI: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

IN TAL CASO $\exists_1\ x \in \mathbb{R}^n$ SOL. DI (1) SSE:

1) $\exists A^{-1}$ OPPURE 2) $\operatorname{rank}(A) = n$ OPPURE

3) $A\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0$

TEOREMA DI CRAMER

SE $\det(A) \neq 0$ $\exists_1$ SOL. DEL SISTEMA DATA DA:

$$x_i = \frac{\det(\Delta_i)}{\det(A)} \qquad (2)$$

CON:
$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & b_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & b_m & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

↑ $i$-esima colonna $\square$

COSTO COMPUTAZIONALE DI (2): $(n+1)!$ flops.

SE $n = 50$, $10^9$ flops/s $\Rightarrow$ time $= 9.6 \cdot 10^{47}$ ANNI !!!

# ANALISI DI STABILITA' PER SISTEMI LINEARI

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DI UNA MATRICE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$\exists A^{-1}$:
$$\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

CON $\|\cdot\|$ NORMA MATRICIALE INDOTTA. (*)

POICHE': $1 = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = K(A)$

PIU' $K(A)$ E' GRANDE MAGGIORE E' LA SENSIBILITA' DELLA SOL. DI $Ax=b$ ALLE PERTURBAZIONI NEI DATI.
(V. TEOREMA)

DEFINENDO:
$$dist_p(A) = \min \left\{ \frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p} : A+\delta A \text{ SINGOLARE} \right\}$$

SI PUO' DIMOSTRARE CHE:
$$dist_p(A) = \frac{1}{K_p(A)}$$

QUINDI MAGGIORE E' $K(A)$ PIU' VICINO E' IL COMPORTAM. DI $A+\delta A$ AD UNA MATRICE SINGOLARE.

N.B. IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE NON E' UN INDICE DI CONDIZ. SI POSSONO INFATTI TROVARE MATRICI CON DETERMINANTE PICCOLO E NUMERO DI CONDIZ. GRANDE. E VICEVERSA:

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad b_{ii} = 1,\ b_{ij} = -1\ i<j,\ b_{ij} = 0\ i>j$

ESEMPIO:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = 1$, $K(B) = n 2^{n-1}$

(*) NORMA MAT. INDOTTA: $\exists x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$

## TEOREMA 1

SIA A UNA MATRICE QUALUNQUE. PER OGNI $\|\cdot\|$ INDOTTA:

$$\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$$

Dim.

SIA $|\lambda| = \rho(A)$ E $\underline{x}$ A.V. AD ESSO ASSOCIATO, E SIA $\|x\| = 1$

$$\rho(A) = |\lambda| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| = \|A\|$$ ■

DA TALE TEOREMA SI HA PURE: $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

## TEOREMA 2

PER UNA MATRICE QUADRATA SI HA:

$$\boxed{\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \|A\| < 1}$$

PER QUALCHE $\|\cdot\|$ INDOTTA □

## TEOREMA 3

SIA A QUALUNQUE E $\|\cdot\|$ TALE CHE:

$\|A\| < 1$. ALLORA $I+A$ E' NON SINGOLARE E:

$$\boxed{\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}}$$

Dim.

Poiché $\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$. PERTANTO $I+A$ E' NON SINGOLARE POICHE' I SUOI A.V. NON POSSONO ESSERE NULLI.

$$(I+A)(I+A)^{-1} = I$$

$$(I+A)^{-1} + A(I+A)^{-1} = I \quad (*)$$

(*) PER LA VERIFICA MOLTIPL PER $I+A \Rightarrow I+A = I+A$

DA CUI: $$(I+A)^{-1} = I - A(I+A)^{-1}$$

$$\|(I+A)^{-1}\| \leq 1 + \|A\| \, \|(I+A)^{-1}\|$$

$$\|(I+A)^{-1}\| \, (1 - \|A\|) \leq 1$$

E POICHE' PER IP. $\|A\| < 1 \Rightarrow$

$$\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

ANALOGAMENTE PER:

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|} \quad \blacksquare$$

---

VEDIAMO ORA LA RELAZIONE DI $K(A)$ CON LE PERTURBAZIONI SUI DATI.

POICHE' NON POSSIAMO RISOLVERE ESATTAMENTE

$$Ax = b$$

SIA:

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

SUPPONENDO CHE ESSO SIA RISOLTO ESATTAMENTE.
DIAMO UNA STIMA DI $\delta x$ IN FUNZIONE DI $\delta A$, $\delta b$.

**TEOREMA 4** SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\exists A^{-1}$, $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Ip.

$x \in \mathbb{R}^n$ SOL. DI: $Ax = b$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \neq 0$:

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A)\|\delta A\|/\|A\|} \left( \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)}$$

Ts.

Dim.

PER IPOTESI: $\|\delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \|A^{-1}\cdot\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$

PERTANTO $(I + A^{-1}\cdot\delta A)$ E' INVERTIBILE PER IL TEOREMA 3.

SI HA:

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}$$

DA: $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$ SI HA:

$$\cancel{Ax} + A\delta x + x\delta A + \delta A\,\delta x = \cancel{b} + \delta b$$

$$\delta x(A+\delta A) = \delta b - x\delta A$$

$$\delta x = (A+\delta A)^{-1}(\delta b - x\delta A) = (I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - x\delta A)$$

$$\|\delta x\| \leq \|(I+A^{-1}\delta A)^{-1}\|\,\|A^{-1}\|\,(\|\delta b\| + \|x\|\,\|\delta A\|) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\|A^{-1}\|\left(\|\delta b\| + \|x\|\,\|\delta A\|\right)$$

DIVIDIAMO PER $\|x\|$:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|\delta A\|\right) =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\,\|x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right);$$

MA: $\|A\|\,\|x\| \geq \|Ax\| = \|b\|$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1-K(A)\,\|\delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

**TEOREMA 5** SOTTO LE IP. DEL TEOREMA 4 SI SUPPONGA CHE $\delta A = 0$. $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{1}{K(A)}\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

Dim.

SI DIMOSTRA SOLO LA 1ª DISUG. POICHE' LA 2ª E' CONSEG. DEL TEOREMA 4. $\delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta b\| \leq \|A\|\|\delta x\|$

$\Rightarrow \|x\| \cdot \|\delta b\| \leq \|x\|\,\|A\|\,\|\delta x\|$ E POICHE': $\|x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|b\|$

SI HA: $\|x\|\,\|\delta b\| \leq K(A)\,\|\delta x\|\,\|b\|$ $\blacksquare$

# CONDIZIONAMENTO DI UNA MATRICE.

(ALTRO MODO PER RICAVARE $K(A)$)

SERVE A STABILIRE L'INFLUENZA DELLE PERTURBAZIONI DEI DATI $A, b$ SULLA SOLUZIONE $x$.

SIANO $A, F \in Mat(n,n)$, $b, f \in \mathbb{R}^n$,

$\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\det(A) \neq 0$.

$$\begin{cases} (A+\varepsilon F)\, x(\varepsilon) = b + \varepsilon f \\ x(0) = x \end{cases} \qquad (3)$$

SIA $\varepsilon$ PICCOLO, $\det(A+\varepsilon F) \neq 0$. SOL.:

$$x(\varepsilon) = (A+\varepsilon F)^{-1} \cdot (b+\varepsilon f)$$

DERIVIAMO LA (3) RISPETTO AD $\varepsilon$ NELL'INTORNO DELLA ORIGINE:

$$F\, x(\varepsilon) + (A+\varepsilon F)\, \dot{x}(\varepsilon) = f$$

$$\varepsilon = 0 \qquad F\, x(0) + A\, \dot{x}(0) = f$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x}(0) = A^{-1}(f - F \cdot x(0))$$

$$x(\varepsilon) \sim x(0) + \varepsilon\, \dot{x}(0)$$

$$\frac{\|x(\varepsilon) - x(0)\|}{\|x(0)\|} \sim \frac{\|\varepsilon\, \dot{x}(0)\|}{\|x(0)\|} = \frac{\|\varepsilon A^{-1}(f - F \cdot x(0))\|}{\|x(0)\|} \leq$$

$$\leq \varepsilon \|A^{-1}\| \left( \frac{\|f\|}{\|x(0)\|} + \|F\| \right) = \varepsilon \|A^{-1}\| \, \|A\| \left( \frac{\|f\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|F\|}{\|A\|} \right)$$

$$\leq K(A) \left( \frac{\|\varepsilon f\|}{\|b\|} + \frac{\|\varepsilon F\|}{\|A\|} \right)$$

NUMERO DI CONDIZIONAMENTO:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$K(A) \geq \frac{\text{ERRORE SUI RISULTATI}}{\text{ERRORE SUI DATI}}$$

NOTIAMO CHE: $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$

QUANTO PIÙ K(A) E' PROSSIMO AD 1 TANTO MEGLIO E' CONDIZIONATA.

LA CONOSCENZA DI $\|A^{-1}\|$ NON E' FACILE DA OTTENERE.

MODO EMPIRICO (ANALISI APOSTERIORI):

PERTURBARE I DATI E VEDERNE L'INFLUENZA SUI RISULTATI.

SE LA MATRICE NON E' MAL CONDIZIONATA SI PUO' RISOLVERE IL SISTEMA.

DUE STRATEGIE: METODI DIRETTI, METODI ITERATIVI.

LA SCELTA DEL METODO SI BASA SUL TIPO DI MATRICE E SULLE RISORSE A DISPOSIZIONE: TEMPO DI CALCOLO E SPAZIO DI MEMORIA.

ESEMPIO. MATRICE DI HILBERT

$$H_n = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}$$

| $n$ | $K(H_n)$ |
|---|---|
| 3 | $5 \cdot 10^2$ |
| 4 | $1 \cdot 10^4$ |
| 5 | $4 \cdot 10^5$ |
| 6 | $1 \cdot 10^7$ |
| $\vdots$ | |
| 10 | $1 \cdot 10^{13}$ |

---

CORRELAZIONE TRA $K(A)$ E $\rho(A)$

$$K(A) \geq \rho(A) \cdot \rho(A^{-1})$$

$$K(A) \geq \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$$

# RISOLUZIONE DI SISTEMI TRIANGOLARI

SIA DATO IL SEGUENTE SISTEMA LINEARE 3X3 NON DEGENERE:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$Lx = b$$

POICHE' $\det(L) \neq 0$ $l_{ii} \neq 0$. LA SOL. E' QUINDI DATA DA:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 / l_{11} \\ x_2 = (b_2 - l_{21} x_1) / l_{22} \\ x_3 = (b_3 - l_{31} x_1 - l_{32} x_2) / l_{33} \end{cases}$$

IN GENERALE SI HA QUINDI (METODO DELLE SOSTITUZIONI IN AVANTI):

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = b_1 / l_{11} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j\right) / l_{ii} \end{array}} \qquad i = 2, \dots, n$$

COSTO COMPUTAZIONALE: # MOLTIPL. E DIVISIONI $= n(n+1)/2$

\# ADDIZ. E SOTTR. $= n(n-1)/2$

PER UN TOTALE DI $\boxed{n^2 \text{ flops.}}$

METODO DELLE SOSTITUZIONI INDIETRO:

$$Ux = b \implies \boxed{\begin{array}{l} x_n = b_n / u_{nn} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right) / u_{ii} \end{array}} \qquad i = n-1, \dots, 1$$

# METODI DIRETTI

LA SOLUZIONE E' OTTENUTA CON UN NUMERO FINITO DI PASSI.

## METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUß.

SIA $Ax=b$ CON $DET(A) \neq 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

SIA $a_{11} \neq 0$. SE CIO' NON SI HA SI SCAMBIA LA 1ª RIGA CON UNA DELLE SUCCESSIVE IN CUI IL COEFFICIENTE DI $x_1$ SIA $\neq 0$.

SIA:

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \text{per } i = 2, \dots, n$$

E AGGIUNGIAMO ALLA $i$-ESIMA EQ. LA 1ª MOLTIPL. PER $m_{i1}$.

SI HA:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

DOVE:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} + m_{i1} \cdot a_{1j} \qquad i, j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i + m_{i1} b_1 \qquad i = 2, \dots, n$$

OPERIAMO ALLO STESSO MODO DALLA 2ª EQ. MOLTIPL. PER:

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

AL PASSO $n-1$ IL SISTEMA HA LA SEGUENTE FORMA:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

CHE E' TRIANGOLARE E QUINDI SI RISOLVE CON IL METODO DI SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO.

# ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2+6x_3+5x_4=23 \\ 7x_1+10x_2+8x_3+7x_4=32 \\ 6x_1+8x_2+10x_3+9x_4=33 \\ 5x_1+7x_2+9x_3+10x_4=31 \end{cases}$$

MOLTIPLICHIAMO PER $-\frac{7}{5}$ LA 1ª EQ. E LA AGGIUNGIAMO ALLA 2ª.

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2+6x_3+5x_4=23 \\ 0.2x_2-0.4x_3 = -0.2 \\ -0.4x_2+2.8x_3+3x_4=5.4 \\ 3x_3+5x_4=8 \end{cases}$$

MOLTIPLICHIAMO PER 0.2 LA 2ª E LA AGGIUNGIAMO ALLA 3ª.

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2+6x_3+5x_4=23 \\ 0.2x_2+-0.4x_3 = -0.2 \\ 2x_3+3x_4=5 \\ 0.5x_4=0.5 \end{cases}$$

PROCEDENDO DALL'ULTIMA EQ. SI RICAVA:

$x_4=1,\ x_3=1,\ x_2=1,\ x_1=1.$

PERCHE' IL METODO DI GAUSS FUNZIONI E' NECESSARIO CHE GLI ELEMENTI $a_{ii} \neq 0$. CIO' NON E' COMUNQUE SUFF. A GARANTIRE CHE NEI PASSI SUCCESSIVI GLI ELEMENTI DIAGONALI NON SI ANNULLINO. INFATTI SIA:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad a_{ii} \neq 0 \quad i=1,2,3$$

EPPURE:

$$A^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \qquad \text{DA CUI } a_{22}^{(2)} = 0$$

ABBIAMO BISOGNO DI CONDIZIONI PIU' RESTRITTIVE SU A. VEDREMO PIU' AVANTI CHE SE TUTTI I MINORI PRINCIPALI DI A SONO NON NULLI ALLORA ANCHE GLI ELEMENTI DIAGONALI IN TUTTI I PASSI DI ELIMINAZIONE SARANNO NON NULLI.

NOTIAMO CHE LA MATRICE A HA IL 2° MINORE PRINCIPALE =0. SCAMBIANDO IN $A^{(2)}$ LA 2ª E LA 3ª RIGA IL METODO FUNZIONA.

PER EVITARE INOLTRE PROBLEMI DI ARROTONDAMENTO SI USANO LE TECNICHE DEL PIVOT PARZIALE E DEL PIVOT TOTALE.

PIVOT PARZIALE AL J-ESIMO PASSO SI CERCA IL MAX ELEMENTO DELLA j-ESIMA COLONNA: $a_{Ij} = \max_{1 \le i \le n} |a_{ij}|$

PERTANTO AL 1° PASSO: $a_{I1} = \max_{1 \le i \le n} |a_{i1}|$

PIVOT TOTALE SI TROVA IL MAX ELEMENTO:

$a_{IJ} = \max_{\substack{i \geq 1 \\ j \le n}} |a_{ij}|$ E SI SCAMBIANO LA RIGA $i$ CON LA RIGA $I$ E LA COLONNA $j$ CON LA COLONNA $J$.

IL METODO DEL PIVOT TOTALE E' PIÙ PRECISO MA BISOGNA MEMORIZZARE L'ORDINE DI ELIMINAZIONE DELLE VARIABILI E QUINDI SI OCCUPA MOLTA MEMORIA.

PER FAR VEDERE LA NECESSITA' DEL PIVOTING ABBIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO:

$$\begin{cases} 0.0001\,x + 1.00\,y = 1.00 \\ 1.00\,x + 1.00\,y = 2.00 \end{cases}$$

$x = 1.00010 \quad y = 0.99990$ SOL. ANALITICA

$x_G = 0.00 \quad y_G = 1.00$ SOL. CON GAUSS

RISCRIVENDO IL SISTEMA :

$$\begin{cases} 1.00\,x + 1.00\,y = 2.00 \\ 0.0001\,x + 1.00\,y = 1.00 \end{cases}$$

$$x_G = 1.00, \quad y_G = 1.00$$

METODI DI FATTORIZZAZIONE. SONO UNA RIFORMULAZIONE MATRICIALE DEL METODO DI GAUSS. CONSISTONO NEL TROVARE UNA MATRICE $S$ NON SINGOLARE E FORMARE UN SISTEMA EQUIVALENTE A QUELLO ORIGINALE.

$$Ax = b \Rightarrow S'Ax = S'b, \quad S'A = U.$$

U: MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE.

SE $S$ E' TRIANG. INF. LO E' PURE $S^{-1}$:

$$A = S^{-1}U = LU$$

FATTORIZZAZIONE **LU** : L TRIANG. INF, $l_{ii} = 1 \Rightarrow$ GAUSS

FATTORIZZAZIONE **$LL^T$**: L CON ELEM. DIAG. POSITIVI $\Rightarrow$ CHOLESKY

FATTORIZZAZIONE **QR** : Q ORTOGONALE, R TRIANG. SUP. $\Rightarrow$ HOUSEHOLDER

# RIFORMULAZIONE MATRICIALE DEL METODO DI GAUß

I VANTAGGI DI FATTORIZZARE A NEL PRODOTTO L U DERIVANO DAL FATTO CHE L ED U NON DIPENDONO DAL TERMINE NOTO. POICHE' IL COSTO COMPUTAZIONALE DELLA PROCEDURA DI ELIMINAZIONE E' $\sim \frac{2}{3}n^3$ flops SI HA UN RISPARMIO DI OPERAZIONI SE SI DEVONO RISOLVERE PIÙ SISTEMI LINEARI CHE HANNO LA STESSA MATRICE.

SIA:
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

E:
$$L_1 = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & 0 \\ m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ m_{n1} & & & 1 \end{vmatrix}$$
CON:
$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad i=2,..,n$$

IL PRODOTTO $L_1 A$ EQUIVALE AL 1° PASSO DI GAUß.

IN GENERALE:
$$L_i = \begin{vmatrix} 1 & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & m_{ji} & \ddots & \\ & & \vdots & 0 & 1 \\ & & m_{ni} & & \end{vmatrix}$$
CON:
$$m_{ji} = -\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$$
$$j = i+1,..,n$$

ALLA FINE SI HA: $U = L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdots L_2 \cdot L_1 \cdot A$

PONIAMO: $\tilde{L} = L_{n-1} \cdots L_1$

$\Rightarrow$ $U = \tilde{L} A$

$A = \tilde{L}^{-1} U$ E PONENDO:

$L = \tilde{L}^{-1}$ SI HA:

$A = LU$

LA SOL. DI $Ax=b \Leftrightarrow LUx=b$ SI TROVA IN DUE STEPS:

SI PONE: $Ly=b$ SI RISOLVE PER $y$ E DA:

$Ux=y$ SI TROVA $x$.

- - -

LA FATTORIZZAZIONE LU PUÒ ESSERE COMBINATA CON IL PIVOTING PARZIALE E CON LO SCALING DEI FATTORI.

NON C'E' COMUNQUE UNICITA' NELLA SCELTA DI L ED U SE L ED U SONO SEMPLICEMENTE GENERICHE.

CIO' SI PUÒ VEDERE IN DUE MODI:

1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{m1} & \cdots & l_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{mm} \end{vmatrix}$$

UGUAGLIANDO I TERMINI SI HANNO $m^2$ EQUAZIONI CHE PERÒ CONTENGONO OGNUNA $\frac{m(m+1)}{2}$ INCOGNITE PER UN TOTALE DI $m^2+m$ INCOGNITE. $m$ DI ESSE VANNO QUINDI DETERMINATE ARBITRARIAMENTE.

2) SIANO $L_1U_1$ ED $L_2U_2$ DUE DECOMPOS. DI A:

$$A = L_1U_1 = L_2U_2$$

$$\Rightarrow \qquad L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

POICHE' LA MATRICE SX E' L E QUELLA DX E' U SI DEVE AVERE:

$$L_1 = L_2D \,, \quad U_1 = D^{-1}U_2$$

DOVE D E' UNA MATRICE DIAGONALE.

- — -

SCEGLIENDO: $l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = 1$

SI HA IL METODO DI DOOLITTLE CHE E' IL METODO DI FATTORIZZAZIONE EQUIVALENTE ALL'ELIMINAZIONE GAUSSIANA.

SCEGLIENDO: $u_{11} = u_{22} = \dots = u_{nn} = 1$

SI HA IL METODO DI CROUT

DA UN PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE, E' POSSIBILE MEMORIZZARE LE MATRICI L ED U NELLA STESSA AREA DI MEMORIA DI A.

COMUNQUE, NON SEMPRE ESISTE UNA DECOMPOSIZIONE LU DI A.

ESEMPIO: $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

SEBBENE $\exists A^{-1}$ NON E' POSSIBILE FATTORIZZARE A. INVECE LA MATRICE I+A, CHE E' SINGOLARE, HA UNA FATTORIZZAZIONE LU.

SI HA IL:

TEOREMA $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(A_k) \neq 0 \quad k = 1, .., n$

$$\Rightarrow \exists_1 L, U : \quad A = LU$$

COROLLARIO SOTTO LE STESSE IPOTESI:

$\exists$ UNICA FATTOR. DI DOOLITTLE E: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

DIM. IL COROLLARIO

PER INDUZIONE: $k = 1 \quad A_1 = L_1 U_1, \; a_{11} = l_{11} u_{11} = u_{11} \Rightarrow \exists_1 u_{11}$

SIA VERA LA TESI PER K-1 CIOE':

$\exists_1 L_{K-1} U_{K-1}: A_{K-1} = L_{K-1} U_{K-1}, \ \det(A_{K-1}) = \prod_{i=1}^{K-1} u_{ii}$

E DIMOSTRIAMO CHE: $A_K = L_K U_K, \ \det(A_K) = \prod_{i=1}^{K} u_{ii}$

PRODOTTO A BLOCCHI:

$$\begin{array}{c} K-1 \{ \\ 1 \{ \end{array} \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} L_{K-1} & 0 \\ \hline v^T & 1 \end{array}\right|}_{K-1 \quad 1} \cdot \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} U_{K-1} & w \\ \hline 0 & u_{KK} \end{array}\right|}_{K-1 \quad 1} = \underbrace{\left|\begin{array}{c|c} A_{K-1} & c \\ \hline b^T & a_{KK} \end{array}\right|}_{K-1 \quad 1} \begin{array}{c} \} K-1 \\ \} 1 \end{array}$$

$L_{K-1} U_{K-1} = A_{K-1}$ VERO PER LE IP. DI INDUZIONE

$L_{K-1} w = c$ $\quad \det(L_{K-1}) = 1 \Rightarrow \exists_1 w : L_{K-1} w = c$

$v^T U_{K-1} = b^T$ $\quad \det(A_{K-1}) = \det(L_{K-1}) \cdot \det(U_{K-1}) = \det(U_{K-1})$

$\Rightarrow \exists_1 v : U_{K-1}^T v = b$

$v^T w + u_{KK} = a_{KK}, \ u_{KK} = a_{KK} - v^T w,$

MA $v, w, a_{KK}$ UNICI $\Rightarrow$ ANCHE $u_{KK}$ UNICO.

$\Rightarrow A_K = L_K U_K, \ \det(A_K) = \det(L_K) \det(U_K) = \prod_{i=1}^{K} u_{ii}$

$\blacksquare$

LE IP. NON SONO FACILI DA VERIFICARE.

SE $A : \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists P$ matrice DI PERMUTAZIONE:

$$PA = LU$$

PER 2 TIPI DI MATRICI NON E' NECESSARIO UNO SCAMBIO DI RIGHE O DI COLONNE PER AVERSI LA FATTORIZZAZIONE LU: DEBOLMENTE DIAGON. DOMINANTI, SIMMETRICHE DEFINITE POSITIVE.

# TEOREMA DI CHOLESKY

$A \in Mat(n,n)$, $A = A^T$, $x^T A x > 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow$ ESISTE ALMENO L TRIANG. INF.:

$$A = L L^T$$

SE SI IMPONE CHE $l_{ii} > 0 \ \forall i$ LA FATTORIZZ. E' UNICA.

DIM.

PER IL CRITERIO DI SYLVESTER $\det(A_k) > 0 \ \forall k$. PER IL TEOREMA PRECEDENTE ESISTE UN'UNICA FATTORIZZ. LU. ■

PONENDO:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & & 0 \\ u_{12} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ & & u_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

SI HA:

$$a_{kk} = \sum_{p=1}^{k} u_{pk}^2 = u_{kk}^2 + \sum_{p=1}^{k-1} u_{pk}^2 \Rightarrow u_{kk}^2 = a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} u_{pk}^2$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{k} u_{ki} u_{ij} = u_{kk} u_{kj} + \sum_{i=1}^{k-1} u_{ki} u_{ij}$$

$$\Rightarrow u_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ki} u_{ij}\right) / u_{kk} \qquad k > j$$

DA CUI SI HA IL METODO DI **CHOLESKY**:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{kj}\right) / l_{ii} \qquad i = 2, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, i-1$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$$

TALE METODO E' IL MIGLIORE PER LE MATRICI SIMM. DEF. POS. POICHE' NON DISTRUGGE LA SIMMETRIA DELLA MATRICE.

I METODI FIN QUI VISTI UTILIZZANO UN NUMERO DI OPERAZIONI $\propto n^3$ SE $n$ E' L'ORDINE DELLA MATRICE.

# SISTEMI TRIDIAGONALI

$a_{ij} = 0 : |i-j| > 1$

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & c_1 & 0 & \cdots & & \\
b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \cdots & \\
 & b_3 & \ddots & \ddots & 0 & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 0 & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & b_n & a_n
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\alpha_1 & & & & \\
b_2 & \alpha_2 & & 0 & \\
 & b_3 & \alpha_3 & & \\
 & 0 & \ddots & \ddots & \\
 & & & b_n & \alpha_n
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
1 & \gamma_1 & & & \\
 & 1 & \gamma_2 & 0 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & \ddots & \gamma_{n-1} \\
 & & & & 1
\end{vmatrix}
$$

$a_1 = \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 \gamma_1 = c_1$

$a_i = \alpha_i + b_i \gamma_{i-1} \qquad i = 2, \ldots, n$

$\alpha_i \gamma_i = c_i \qquad i = 2, \ldots, n-1$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 = a_1 \quad , \quad \gamma_1 = c_1 / \alpha_1$

$\alpha_i = a_i - b_i \gamma_{i-1} \quad , \quad \gamma_i = \dfrac{c_i}{\alpha_i} \qquad i = 2, \ldots, n-1$

$\alpha_n = a_n - b_n \gamma_{n-1}$

COSTO COMPUTAZIONALE: $8n-7$ flops.

# METODI ITERATIVI

I METODI DI FATTORIZZAZIONE MODIFICANO LA MATRICE INIZIALE E, SE QUESTA E' SPARSA, CIOE' HA MOLTI ZERI, SI HANNO PROBLEMI DI MEMORIA.

I METODI ITERATIVI GENERANO UNA SUCCESSIONE DI VETTORI $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ CHE SI SPERA CONVERGA ALLA SOLUZIONE DI $A\underline{x}=\underline{b}$. LA MATRICE A NON VIENE MODIFICATA.

SIA $A\in mat(n,n)$, $det(A)\neq 0$. PONIAMO:

$$Ax=b$$

$$A=M-N$$

$$(M-N)x=b$$

$$Mx_{m+1}=Nx_m+b$$

$$x_{m+1}=M^{-1}Nx_m+M^{-1}b$$

UNA DECOMPOSIZIONE O SPLITTING DI A SI DICE REGOLARE SE: $det(M)\neq 0$, $M^{-1}\geq 0$, $N\geq 0$

UN METODO ITERATIVO E' DETTO CONVERGENTE SE PER QUALUNQUE VETTORE INIZIALE $x_0$ LA SUCCESSIONE $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ E' CONVERGENTE.

TEOREMA

SIA: $A=M-N$ UNO SPLITTING REGOLARE DI A E SIA:

$$\|M^{-1}N\| \leq \lambda < 1$$

$\Rightarrow$ i) A E' NON SINGOLARE

ii) IL METODO ITERATIVO ASSOCIATO A TALE SPLITTING E' CONVERGENTE

iii) $\|x_m - x\| \leq \lambda^m \|x_0 - x\|$ CHE DA' UN LIMITE DELL' ERRORE COMMESSO.

DIM.

i) PER ASSURDO SIA A SINGOLARE. $Ay=0$ HA ALMENO UNA SOL. NON BANALE: $y \neq 0$ : $(M-N)y=0$, $y=M^{-1}Ny$

$$\|y\| \leq \|M^{-1}N\|\|y\| \leq \lambda\|y\| \rightarrow \lambda \geq 1 \text{ ASSURDO}$$

iii) PONIAMO: $P=M^{-1}N$, $e_m = x_m - x$

$$e_m = Pe_{m-1} = \dots = P^m e_0$$

$$\|e_m\| \leq \|P^m\|\|e_0\| \leq \lambda^m\|e_0\|$$

ii) $\lim_{m\to\infty} \|e_m\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x\| = \lim_{m\to\infty} \lambda^m \|e_0\| = 0$ POICHE' $\lambda < 1$.

■

CONDIZIONI NECESSARIE PER LA CONV. DI UN METODO ITERATIVO DI FACILE VERIFICA:

- POICHE' IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE E' IL PRODOTTO DEGLI AUTOVALORI SE $|\det(M^{-1}N)| \geq 1$ ALLORA ALMENO UNO DEGLI AUTOVALORI E' $\geq 1$ E QUINDI IL METODO NON PUO' CONVERGERE.
- POICHE' LA TRACCIA(*) DI UNA MATRICE E' LA SOMMA DEGLI AUTOVALORI SE $|Tr(M^{-1}N)| \geq n$ ALMENO

(*) $tr(A) = \sum^{n} a_{ii}$

UNO DEGLI AUTOVALORI E' >1 QUINDI IL METODO NON PUO' CONVERGERE. QUINDI:

$$|\det(M^{-1}N)| < 1, \quad |\mathrm{tr}(M^{-1}N)| < n$$

SONO C.N. PER LA CONVERGENZA DEL METODO.

TEOREMA

C.N.E S. PERCHE' IL METODO ITERATIVO SIA CONVERGENTE E' CHE: $\rho(M^{-1}N) < 1$.

## METODO DI JACOBI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad a_{11}, a_{22}, a_{33} \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{cases}$$

PARTENDO DA $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ SI GENERA LA SUCCESSIONE $x^{(k)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})/a_{33} \end{cases}$$

IN GENERALE IL METODO DI JACOBI E':

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\Big)/a_{ii} \qquad i = 1, \dots, n$$

# METODO DI GAUSS - SEIDEL

POICHE' NELLA 1ª SOMMATORIA SI USANO LE COMPONENTI "VECCHIE" SI PUO' USARE UNA VARIANTE CHE TIENE CONTO DELLE "NUOVE" COMPONENTI E CIO' DA' LUOGO AL METODO DI GAUSS-SEIDEL CHE (IN GENERALE) E' PIU VELOCE DEL METODO DI JACOBI:

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big) / a_{ii}$$

$$i = 1, .., n$$

## FORMULAZIONE MATRICIALE DEI METODI DI JACOBI E GAUß-SEIDEL

DECOMPONIAMO $A$:

$$A = D - E - F \qquad \exists D^{-1}$$

DOVE $D$ E' LA DIAGONALE DI $A$, $E$ LA SUA PARTE INFERIORE ~~ED~~ $F$ QUELLA SUPERIORE.

$$(D-E-F)x = b$$

$$D x^{(k+1)} = (E+F) x^{(k)} + b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F) x^{(k)} + D^{-1} b} \qquad M_J = D^{-1}(E+F)$$

CHE DA' IL METODO DI JACOBI CHE CONVERGE SE $A$ E' STRETT. DIAGONALMENTE DOMINANTE (C.S.) OVVERO SE:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, .., n$$

SI HA:

$$(D-E) x^{(k+1)} = F x^{(k)} + b$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = (D-E)^{-1} F x^{(k)} + (D-E)^{-1} b}$$

$$M_{GS} = (D-E)^{-1} F$$

CHE DA' IL METODO DI GAUß-SEIDEL.

CHE CONVERGE SE A E' SIMMETRICA DEF. POS. (C.S.)

E

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

E CONVERGE ANCHE SE A E' A DIAG. DOMINANTE STRETTA

TALI METODI SONO MOLTO LENTI SE : $\rho(M^{-1}N) \sim 1$

DOVE : $M = D$, $N = E+F$ IN JACOBI

$M = D-E$, $N = F$ IN GAUSS-SEIDEL.

PER ACCELERARE LA CONVERGENZA SI USANO I METODI DI RILASSAMENTO.

## METODO SOR (SUCCESSIVE OVER-RELAXATION)

TALE METODO CONSISTE NEL CALCOLARE UNA ITERATA DI GAUSS-SEIDEL ED EFFETTUARE UNA CORREZIONE DIPENDENTE DA UN PARAMETRO $\omega$:

$$x^{(k+1)} = \omega \hat{x}^{(k+1)} + (1-\omega) x^{(k)}$$

DOVE $\hat{x}^{(k+1)}$ E' IL PASSO $(k+1)$ DI G.S.

RICAVIAMO TALE SCHEMA:

$$Ax = b \rightarrow \omega A x = \omega b$$

$$Dx + \omega(D-E-F)x = \omega b + Dx$$

$$Dx - \omega E x = Dx + \omega(F-D)x + \omega b$$

SE $\omega = 1$ SI HA G.S. SE $\omega \neq 0$ LA PARTE SINISTRA E' TRIANGOLARE INFERIORE. INTRODUCIAMO L ED R:

$$L = D^{-1}E, \quad R = D^{-1}F$$

$$x^{(k+1)} = H(\omega) x^{(k)} + \omega (D - \omega E)^{-1} b$$

DOVE:

$$H(\omega) = (D-\omega E)^{-1} [D(1-\omega) + \omega F] = [D(I-\omega L)]^{-1} D[(1-\omega)I + \omega R] = (I-\omega L)^{-1} D^{-1} D [(1-\omega)I + \omega R] = (I-\omega L)^{-1} [(1-\omega)I + \omega R]$$

# CONVERGENZA PER SOR

**TEOREMA**. SI HA $\rho(H(\omega)) \geq |\omega - 1| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$. PERTANTO SOR DIVERGE SE $\omega \leq 0$ OPPURE $\omega \geq 2$.

CONVERGENZA: $0 < \omega < 2$

Dim.

SIANO $\lambda_i$ GLI A.V. DI $H(\omega)$. SI HA:

$$\left|\prod_{i=1}^{m} \lambda_i\right| = \det\left[(I - \omega L)^{-1}\right] \cdot \det\left[(1-\omega)I + \omega R^*\right] = |1-\omega|^m$$

PERTANTO DEVE ESISTERE ALMENO UN $\lambda_i : |\lambda_i| \geq |1-\omega|$ E PERCHE' CI SIA CONV. DEVE ESSERE $|1-\omega| < 1$ CIOE' $0 < \omega < 2$.

∎

SE A E' SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA, $0 < \omega < 2$ E' C.N.S.
SE A E' DIAG. DOMINANTE STRETTAMENTE, $0 < \omega \leq 1$ E' C.N.S.

IL PARAMETRO OTTIMALE PER SOR E' DATO DA:

$$\omega_{OPT} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_J)^2}}$$

## CRITERI DI ARRESTO PER METODI ITERATIVI

GENERALMENTE, DATA UNA TOLLERANZA $\varepsilon$, IL METODO SI FERMA QUANDO:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon$$

POICHE' CIO' POTREBBE NON VERIFICARSI MAI, UN ALTRO CRITERIO DI ARRESTO E' DATO DAL NUMERO MASSIMO DI ITERAZIONI DA ESEGUIRE.

# VELOCITA' DI CONVERGENZA

STIMIAMO IL NUMERO K DI ITERAZIONI NECESSARIE PER RIDURRE L'ERRORE INIZIALE DI UN FATTORE $10^{-m}$ O PIÙ.

$$\|e^{(k)}\| \le 10^{-m} \|e^{(0)}\|$$

$$\|e^{(k)}\| \le \|(M^{-1}N)^k\| \|e_0\| \overset{?}{\le} 10^{-m} \|e_0\|$$

$$\|(M^{-1}N)^k\| \le 10^{-m}$$

$$\rho((M^{-1}N)^k) = (\rho(M^{-1}N))^k$$

$$(\rho(M^{-1}N))^k \le 10^{-m}$$

$$k \lg(\rho(M^{-1}N)) \le -m$$

PER LA CONV. $\rho(M^{-1}N) < 1$

$$\Rightarrow K \ge \frac{m}{-\lg \rho(M^{-1}N)}$$

$$R = -\lg(\rho(M^{-1}N)) \quad \text{VEL. DI CONV.}$$

$$k \ge \frac{m}{R}$$

MAGGIORE E' R (PIÙ PICCOLO E' $\rho$) MINORE E' K.

# METODO DEL GRADIENTE

PER MATRICI SIMMETRICHE DEFINITE POSITIVE, LA RISOL. DEL SISTEMA LINEARE:

$$\boxed{Ax=b}$$

E' EQUIVALENTE A TROVARE IL PUNTO DI MINIMO $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ DELLA FORMA QUADRATICA:

$$\boxed{\phi(\underline{y}) = \frac{1}{2}\underline{y}^T A \underline{y} - \underline{y}^T b}$$

CALCOLANDO INFATTI IL GRADIENTE DI $\phi$, CHE HA COMPONENTI: $\frac{\partial \phi}{\partial y_i}$ $i=1,..,n$ SI HA:

$$\nabla\phi(\underline{y}) = \frac{1}{2}(A^T+A)\underline{y} - \underline{b} = A\underline{y} - \underline{b}$$

POICHE' $A^T=A$. PERTANTO: $Ax=b \Leftrightarrow \nabla\phi(\underline{y})=0$

PROBLEMA: DETERMINARE $x$ MINIMO DI $\phi$ PARTENDO DA $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ E QUINDI SCEGLIERE OPPORTUNE DIREZIONI LUNGO LE QUALI AVVICINARSI AD $x$.

TALE DIR. NON E' NOTA A PRIORI. SIA:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{d}^{(k)}$$

$\alpha_k$ = LUNGHEZZA DEL PASSO LUNGO LA DIR. $\underline{d}^{(k)}$.

DIREZ. DI DISCESA: STEEPEST DESCENT.

$$\nabla\phi(\underline{x}^{(k)}) = A\underline{x}^{(k)} - \underline{b} = -r^{(k)} \quad , \underline{d}^{(k)} = -\nabla\phi(\underline{x}^{(k)})$$

$\alpha_k$ SI CALCOLA MINIMIZZANDO $\phi$:

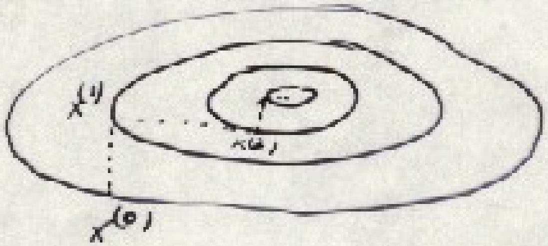
$$\phi(\underline{x}^{(k+1)}) = \frac{1}{2}(\underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{r}^{(k)})^T A (\underline{x}^{(k)} + \alpha_k \underline{r}^{(k)}) - (x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)})^T b$$

$\partial\phi/\partial\alpha_k = 0 \Rightarrow$ $\quad \alpha_k = \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{r_k^T A r_k}$

CIO' HA UNA SEMPLICE INTERPRETAZIONE GEOMETRICA, NEL CASO $n=2$.

SIA: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2$, $\underline{b} = (b_1, b_2)^T$

LE CURVE $\phi(x_1, x_2) = c$ DESCRIVONO UNA SUCCESS. DI ELLISSI. SE $\lambda_2 = \lambda_1$ SI HANNO DEI CERCHI E IL METODO CONV. IN UNA SOLA ~~DOOR.~~ ITERAZIONE POICHE' LA DIREZIONE DEL GRADIENTE PASSA PER IL CENTRO. SE INVECE $\lambda_2 \gg \lambda_1$ IL METODO CONVERGE LENTAMENTE.




N.B. SE LA MATRICE A NON E' SIMMETRICA, IL METODO E' APPLICATO ALLA MATRICE $A^TA$ CHE E' SIMMETRICA E SI RISOLVE IL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$A^TAx = A^Tb.$$

. — .

LA CONVERGENZA DEL METODO E' MIGLIORATA SE COME DIREZIONE DI DISCESA NON SI SCEGLIE QUELLA PIU' RIPIDA, DETERMINATA DAL GRADIENTE, MA SI SCEGLIE LA DIREZIONE CONIUGATA.
SI HA QUINDI IL METODO DEI GRADIENTI CONIUGATI.

# METODO DEI GRADIENTI CONIUGATI

ITERATIVI IN NATURA MA SONO METODI DIRETTI.

UN INSIEME DI VETTORI $\{\underline{p}_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ E' DETTO CONIUGATO DELLA MATRICE $A \in Mat(n,n)$ SE:

$$\underline{p}_i^T A \underline{p}_j = 0 \qquad i,j = 1,..,n, \; i \neq j.$$

I VETTORI $\underline{p}_i$ SONO DETTI DIREZIONI CONIUGATE

SIA $x^*$ LA SOL. DI : $\quad A\underline{x} = \underline{b}$

POICHE' LO SPAZIO E' n-DIMENSIONALE : $\underline{p}_i$ BASE IN $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists_1 \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ :

$$\underline{x}^* = \alpha_1 \underline{p}_1 + \,.\,.\, + \alpha_n \underline{p}_n$$

MOLTIPLICO PER $\underline{p}_k^T A$ :

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\underline{p}_k^T A \underline{x}^*}{\underline{p}_k^T A \underline{p}_k} = \frac{\underline{p}_k^T \underline{b}}{\underline{p}_k^T A \underline{p}_k}} \qquad k = 1,..,n$$

SIA : $\underline{x}_0 = 0$

$\underline{x}_1 = \alpha_1 \underline{p}_1$

$\underline{x}_2 = \alpha_1 \underline{p}_1 + \alpha_2 \underline{p}_2$

$\vdots$

$$\boxed{\underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} + \alpha_k \underline{p}_k}$$

CALCOLIAMO I RESTI:

$$\underline{r}_0 = \underline{b} - A\underline{x}_0 = \underline{b}$$

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_0 - A\underline{x}_1 = \underline{r}_0 - \alpha_1 A\underline{p}_1$$

$$\vdots$$

$$\underline{r}_k = \underline{r}_{k-1} - \alpha_k A\underline{p}_k \qquad (\overline{*})$$

PER $k = n$ SI HA: $\underline{x}_n = \underline{x}^*$, $\underline{r}_n = 0$, $\underline{x}_k = \underline{x}^*$, $k \leq n$

DIMOSTRANDO CHE L'ITERAZIONE CONVERGE IN AL PIU' $n$ PASSI. (A MENO DEGLI ERRORI DI ARROTOND.)

VEDIAMO COME SI GENERANO LE DIREZIONI $\underline{p}_k$:

SUPPONIAMO DI AVERE GIA' $\underline{p}_i$ $i = 1, \dots, k$.

SIA $x_k \neq x^*$ ALTRIMENTI QUESTA E' GIA' LA SOL.

SIA:

$$\boxed{\underline{p}_{k+1} = \underline{r}_k + \beta_{k+1}\underline{p}_k} \qquad \underline{p}_1 = \underline{b}$$

IMPONIAMO: $\underline{p}_k^T A \underline{p}_{k+1} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\beta_{k+1} = -\frac{\underline{p}_k^T A \underline{r}_k}{\underline{p}_k^T A \underline{p}_k}}$$

SE A E' DEFINITA POSITIVA $\underline{p}_k^T A \underline{p}_k \neq 0$. (*)

LA VELOCITA' DI CONVERGENZA, CONSIDERANDO IL METODO COME ITERATIVO DIPENDE DA $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. NEL SENSO CHE PIU' PICCOLO E' $K(A)$ E PIU' RAPIDA E' LA CONVERGENZA. (**)

$\Rightarrow$ TECNICHE DI PRECONDIZIONAMENTO.

N.B. SENZA " # flops $\sim n^4$ !

$(\overline{*})$ $r_n = r_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A p_i = b - A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = b - A x^* = 0$